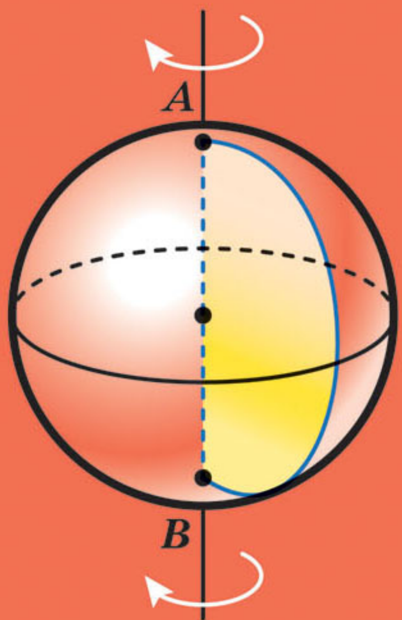
11

# МАТЕМАТИКА

## АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

### РІВЕНЬ СТАНДАРТУ




ГІМНАЗІЯ

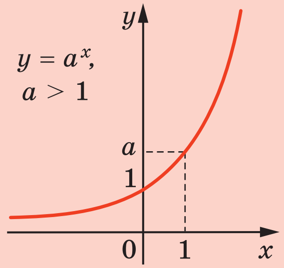
## Форзац 1

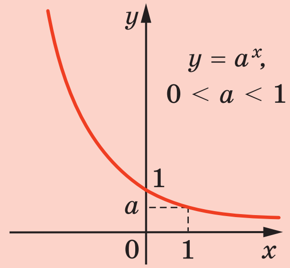

*«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.*

*Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.*

## Форзац 2

### Графік показникової функції




### Властивості логарифмів

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

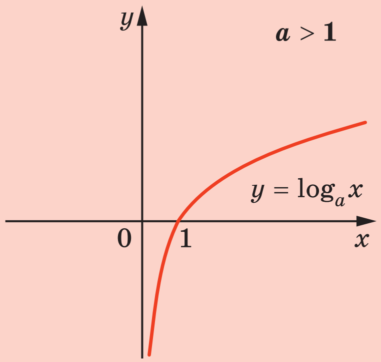
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

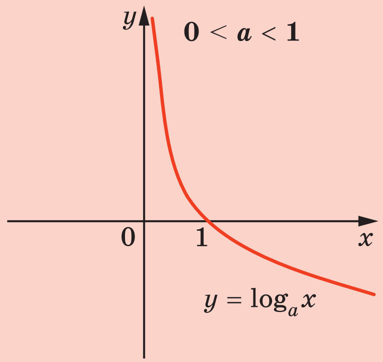
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x, \quad \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

### Графік логарифмічної функції



# МАТЕМАТИКА

## АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

**Видано за рахунок державних коштів.**
**Продаж заборонено**

*Авторський колектив:*
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

**Мерзляк А. Г.**
М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с. : іл.
ISBN 978-966-474-323-2.

**УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]**



ISBN 978-966-474-323-2

# ВІД АВТОРІВ

**Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!**

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе».

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

| | |
|---|---|
| $n^{\circ}$ | завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень; |
| $n^{\bullet}$ | завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень; |
| $n^{\bullet\bullet}$ | завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень; |
| $n^{*}$ | задачі для математичних гуртків і факультативів; |
| ◄ | закінчення доведення теореми, розв’язання задачі; |
|  | ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач; |
|  | рубрика «Коли зроблено уроки». |

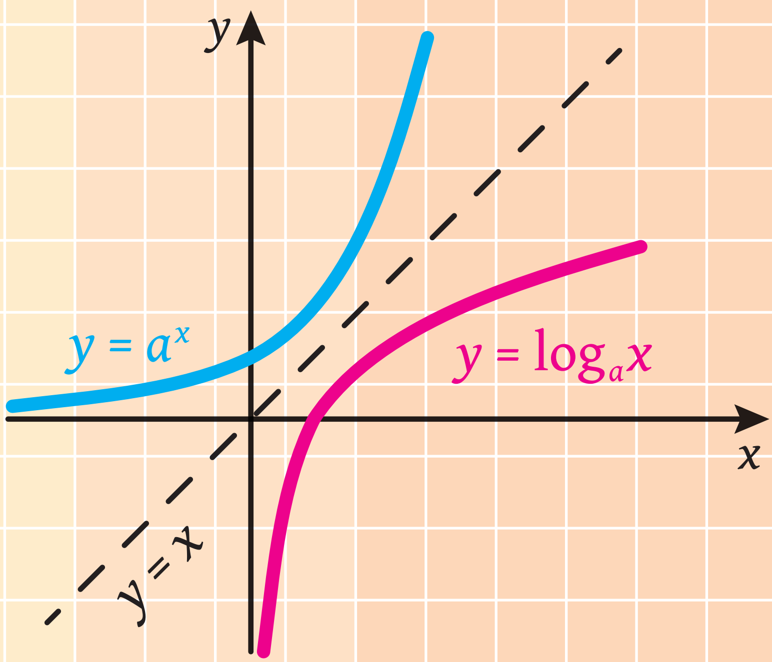
**Зеленим** кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.

# Розділ 1
# Алгебра і початки аналізу

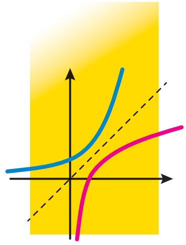
§1. Показникова та логарифмічна функції

§2. Інтеграл і його застосування

§3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики



# § 1 ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником. Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

## 1. Показникова функція та її властивості

Розглянемо функцію $f(x) = 2^x$, де $x$ — раціональне число, тобто областю визначення функції $f$ є множина $\mathbb{Q}$.

На рисунку 1.1 позначено точки графіка функції $f$, які відповідають деяким цілим значенням $x$. Обчислимо значення функції $f(x) = 2^x$ при деяких дробових значеннях $x$. Наприклад, при $x = \frac{1}{2}$ маємо: $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1{,}41...$. Якщо до точок, зображених на рисунку 1.1, додати точки графіка функції $f$, які відповідають, наприклад, значенням $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, то отримаємо множину точок, зображену на рисунку 1.2.

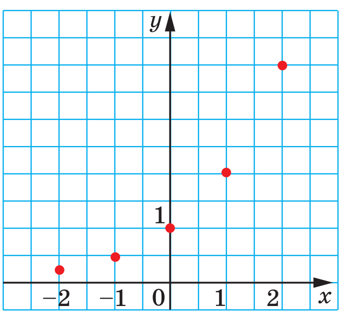



Рис. 1.1

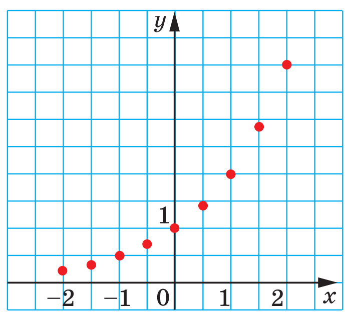



Рис. 1.2

Більш точне уявлення про графік функції $f$ можна отримати, якщо позначити точки, які відповідають іншим раціональним значенням аргументу (рис. 1.3).

Виявляється, що існує тільки одна неперервна на $\mathbb{R}$ функція $g$, графік якої проходить через усі точки графіка функції $f$. Графік функції $g$ зображено на рисунку 1.4. Множина точок графіка функції $f$ є підмножиною множини точок графіка функції $g$.

Функцію $g$ називають **показниковою функцією** з основою 2 і записують: $g(x) = 2^x$.

Аналогічно можна розглядати показникову функцію з будь-якою основою $a$, де $a > 0$ і $a \neq 1$. Записують: $g(x) = a^x$.

Значення функції $g$ у точці $x$ називають **степенем додатного числа $a$ з дійсним показником $x$** і позначають $a^x$.

Багато властивостей степеня з раціональним показником зберігаються і для степеня з дійсним показником.

Зокрема, для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних $x$ і $y$ справедливі такі рівності:

1) $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$;

2) $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$;

3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$;

4) $\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$;

5) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$.

**Задача 1.** Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{2\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1. \blacktriangleleft$$

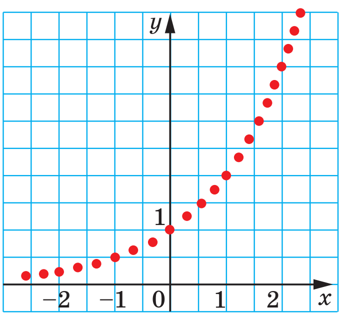



Рис. 1.3

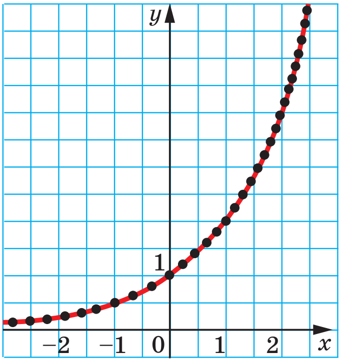



Рис. 1.4

Розглянемо властивості показникової функції $f(x)=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$.

- *Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел*, тобто $D(f)=\mathbb{R}$.
- *Областю значень показникової функції є множина* $(0;+\infty)$, тобто $E(f)=(0;+\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty;+\infty)$ *є її проміжком знакосталості*.
- *При* $a>1$ *показникова функція є зростаючою*; *при* $0<a<1$ *показникова функція є спадною*.
- *Показникова функція є диференційовною*. Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.5 і 1.6 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a>1$ і $0<a<1$ відповідно.

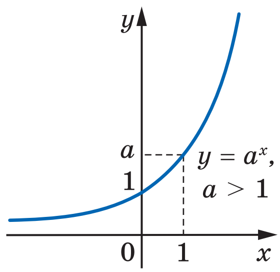



**Рис. 1.5**

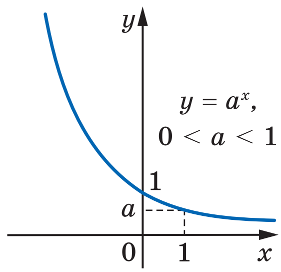



**Рис. 1.6**

Зазначимо важливу властивість графіка показникової функції $y=a^x$ зі збільшенням модуля $x$. Якщо $a>1$ і $x<0$, то відстані від точок графіка функції $y=a^x$ до осі абсцис стають усе меншими й меншими та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Аналогічну властивість має графік функції $y=a^x$ при $0<a<1$ і $x>0$.

**Задача 2.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x)=3^x$ на проміжку $[-4;\ 3]$.

*Розв'язання*. Оскільки функція $f$ зростає на проміжку $[-4;\ 3]$ (рис. 1.5), то найменшого значення вона набуває при $x=-4$, а найбільшого — при $x=3$. Отже,

$$\min_{[-4;\,3]} f(x)=f(-4)=3^{-4}=\frac{1}{81},\qquad \max_{[-4;\,3]} f(x)=f(3)=3^3=27.$$

*Відповідь:* $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Які властивості має степінь з дійсним показником?
2. Сформулюйте властивості показникової функції.
3. Зобразіть схематично графік функції $y = a^x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$.

## ВПРАВИ

**1.1.°** Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

**1.2.°** Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

**1.3.°** Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

**1.4.°** Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли $x$ зростає від $-1$ до 3 включно?

**1.5.°** Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли $x$ зростає від $-2$ до 2 включно?

**1.6.°** Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$; 3) $1$ і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ і $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ і $1$; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

**1.7.°** Порівняйте із числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

**1.8.°** Порівняйте із числом 1 додатне число $a$, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

**1.9.°** Порівняйте числа $m$ і $n$, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

**1.10.•** Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

**1.11.•** Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

**1.12.•** Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$.

**1.13.•** Спростіть вираз:

1) $\left(\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(a^{\pi}-b^{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$.

**1.14.•** Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16?

**1.15.•** Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

**1.16.•** На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше дорівнює $\frac{1}{4}$?

**1.17.•** На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше дорівнює $\frac{1}{9}$?

**1.18.**• Знайдіть область значень функції:

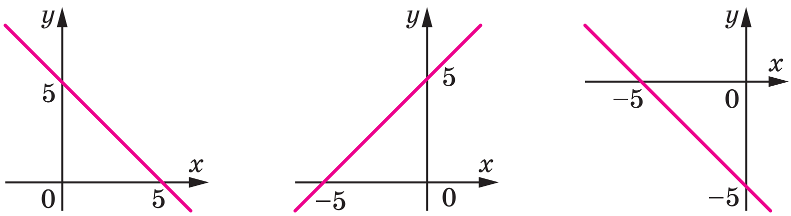
1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

**1.19.**• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

**1.20.**• Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

**1.21.**•• Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.7, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?




*а* *б* *в*

**Рис. 1.7**

**1.22.**•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = \sin x$; 3) $2^{-x} = 2 - x^2$.

**1.23.**•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

**1.24.**•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

**1.25.*** Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

**1.26.*** Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**1.27.** Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

**1.28.** Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

**1.29.** Спростіть вираз:

1) $7^{x+1}+7^x$;
2) $2^{x+1}+2^{x-4}$;
3) $3^{x+1}+3^x+3^{x-1}$;
4) $2^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x}+36^{\frac{x}{2}}-6^{x+1}$;
6) $9^{x+1}+3^{2x+1}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**1.30.** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-8}$;
2) $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

**1.31.** Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=12-4x-x^2$;
2) $f(x)=3+\sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x)=\cos x \operatorname{tg} x$.

## ЧИ ПОТРІБНО ВИВЧАТИ ПОКАЗНИКОВУ ФУНКЦІЮ?

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Наприклад, біологам відомо, що маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t=0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t=1$ маса дорівнювала $a$, то в моменти часу $t=2$, $t=3$, ..., $t=n$, ... маса дорівнюватиме відповідно $a^2$, $a^3$, ..., $a^n$, ... . Тому природно вважати, що в будь-який момент часу $t$ маса дорівнюватиме $a^t$. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t)=a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t)=a^t$.

Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші на рахунок у банку під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Тому показникова функція описує і ці процеси.

## 2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

**Теорема 2.1.** ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

*Доведення.* Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$.

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно, розглядаючи випадок, коли $x_1 > x_2$, можна отримати суперечність. Отже, $x_1 = x_2$. ◄

**Наслідок.** ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

***рівносильне рівнянню***

$$f(x) = g(x).$$

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

**Задача 1.** Розв'яжіть рівняння $2^x = 8$.

*Розв'язання.* Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо:

$$2^x = 2^3.$$

Звідси $x = 3$.

*Відповідь*: 3. ◄

**Задача 2.** Розв'яжіть рівняння $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

*Розв'язання.* Маємо: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$; $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$.

Винесемо множник $3^{2x}$ за дужки: $3^{2x}(3^1+1)=36$.

Далі отримуємо: $3^{2x}\cdot 4=36$; $3^{2x}=9$; $3^{2x}=3^2$; $2x=2$; $x=1$.

*Відповідь*: 1. ◄

**Задача 3.** Розв'яжіть рівняння $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

*Розв'язання.* Оскільки $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x=t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Звідси $t=1$ або $t=-5$.

Якщо $t=1$, то $5^x=1$. Звідси $5^x=5^0$; $x=0$.

Якщо $t=-5$, то $5^x=-5$. Оскільки $5^x>0$ при будь-якому $x$, то рівняння $5^x=-5$ не має коренів.

*Відповідь*: 0. ◄

**Задача 4.** Розв'яжіть рівняння $9\cdot 5^x=25\cdot 3^x$.

*Розв'язання.* Маємо: $3^2\cdot 5^x=5^2\cdot 3^x$. Звідси $\frac{5^x}{3^x}=\frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^2$; $x=2$.

*Відповідь*: 2. ◄

1. Що можна сказати про числа $x_1$ і $x_2$, якщо виконується рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$, де $a>0$ і $a\neq 1$?
2. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, якщо $a>0$ і $a\neq 1$?

## ВПРАВИ

**2.1.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x=64$;
2) $3^x=\frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3}=1$;
4) $10^{-x}=0{,}001$;
5) $2^{5-x}=2^{3x-7}$;
6) $8^x=16$;
7) $\sqrt{5^x}=25$;
8) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
9) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$;
10) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
11) $36^x=\left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
12) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$.

**2.2.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$; 4) $9^{-x}=27$; 7) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$; 5) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;

3) $0{,}7^x=2\frac{2}{49}$; 6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$; 9) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$.

**2.3.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2}+3^x=30$; 3) $2^{x+4}-2^x=120$; 5) $5^x+7\cdot 5^{x-2}=160$;

2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$; 4) $7^{x+1}+4\cdot 7^x=77$; 6) $6^{x+1}-4\cdot 6^{x-1}=192$.

**2.4.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x=150$; 3) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$;

2) $2^x+2^{x-3}=18$; 4) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$.

**2.5.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$; 3) $25^x-5^x-20=0$;

2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$; 4) $100\cdot 0{,}3^{2x}+91\cdot 0{,}3^x-9=0$.

**2.6.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x}-3\cdot 6^x-18=0$; 2) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0$.

**2.7.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$; 3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $3^{x-1}=6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$; 4) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

**2.8.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$; 3) $9\cdot 3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

2) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot 6^{2x+5}$; 4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.

**2.9.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$; 3) $2\cdot 7^x+7^{x+2}-3\cdot 7^{x-1}=354$;

2) $6\cdot 5^x-5^{x+1}-3\cdot 5^{x-1}=10$; 4) $4^{x-2}-3\cdot 2^{2x-1}+5\cdot 2^{2x}=228$.

**2.10.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$; 3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;

2) $3^{x+1}-2\cdot 3^{x-1}-4\cdot 3^{x-2}=17$; 4) $2\cdot 3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot 3^{2x}=36$.

**2.11.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1}-5\cdot 2^x+2=0$; 3) $9^x-6\cdot 3^{x-1}=3$;

2) $5^{2x-3}-2\cdot 5^{x-2}=3$; 4) $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$.

**2.12.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^{x} + 3 = 0$;
2) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^{x} = 4$;
3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$;
4) $\dfrac{5}{3^{x} - 6} + \dfrac{5}{3^{x} + 6} = 2$.

**2.13.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
2) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$;
3) $4 \cdot 3^{x} - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$;
4) $2^{x} + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^{x} - 3^{x-1} + 3^{x-2}$.

**2.14.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
2) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$;
3) $6^{x} + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^{x} - 8 \cdot 7^{x-2}$.

**2.15.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;
2) $5^{x} - 0,2^{x-1} = 4$.

**2.16.**•• Розв'яжіть рівняння $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$.

**2.17.**•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^{x} - 2^{x} - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^{x} - 7}$.

**2.18.**•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^{x} - 9^{x}} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^{x}}$.

**2.19.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^{x} + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;
2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^{x} + 25^{x+0,5} = 0$;
3) $7 \cdot 49^{x} + 3 \cdot 28^{x} = 4 \cdot 16^{x}$;
4) $9^{x} + 4^{x} = 2 \cdot 6^{x}$.

**2.20.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^{x} - 7 \cdot 12^{x} + 3 \cdot 16^{x} = 0$;
2) $5 \cdot 2^{x} + 2 \cdot 5^{x} = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**2.21.** Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = \dfrac{x^2 + 21}{x - 2}$.

**2.22.** Якого найменшого значення може набувати вираз $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$?

# 3. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

В основі розв'язування багатьох показникових нерівностей лежить така теорема.

**Теорема 3.1.** ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

**Задача 1.** Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < 0{,}5^{-1}$.

*Розв'язання.* Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів $2^{3x+2}$ і $2^1$ більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

*Відповідь:* $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

**Задача 2.** Розв'яжіть нерівність $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$.

*Розв'язання.* Маємо: $4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$;

$$\left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x; \ \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.$$

Оскільки $0 < \frac{3}{5} < 1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x \leqslant 2x$; $x \geqslant 0$.

*Відповідь:* $[0; +\infty)$. ◄

**Задача 3.** Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

*Розв'язання.* Маємо: $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Нехай $2^x = t$. Тоді $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

Звідси $-\frac{1}{2} < 2^x < 4$.

Оскільки $2^x > 0$, то $2^x > -\frac{1}{2}$ при всіх $x$. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^x < 4$.

Маємо: $2^x < 2^2$; $x < 2$.

*Відповідь*: $(-\infty; 2)$. ◄

1. Наведіть приклади показникових нерівностей.
2. Якій нерівності рівносильна нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

## ВПРАВИ

**3.1.°** Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

**3.2.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
6) $9^{1-3x} \leqslant 0$.

**3.3.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$; 2) $10^x < 0{,}001$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

**3.4.•** Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2-1} < 8$;
2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
3) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
6) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
7) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;
8) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

**3.5.**$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;

2) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;

4) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

5) $\left(\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$.

**3.6.**$^\bullet$ Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0,2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0,5^{x-1} \leqslant 32$?

**3.7.**$^\bullet$ Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$; 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

**3.8.**$^\bullet$ Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

**3.9.**$^\bullet$ Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

**3.10.**$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

**3.11.**$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

**3.12.**$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

**3.13.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1}-2\cdot3^{x}-7\leqslant0$;
2) $2^{x}+2^{\frac{x}{2}}-72\geqslant0$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2>0$;
4) $25^{x}-26\cdot5^{x}+25\leqslant0$.

**3.14.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^{x}-125}{x^{2}-4x+4}\leqslant0$;
2) $\frac{16-4^{x}}{9x^{2}+12x+4}\geqslant0$.

**3.15.**•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x}-9\cdot3^{-x}-8>0$;
2) $2^{x+3}+2^{1-x}<17$;
3) $6^{x+2}+6^{-x}-37\geqslant0$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}\leqslant\frac{6}{5}$.

**3.16.**•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1}-2\cdot3^{1-x}>7$;
2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}\geqslant1$.

**3.17.*** Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant1$.

**3.18.*** Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant8$.

**3.19.*** Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot4^{x}+2\cdot9^{x}-5\cdot6^{x}<0$;
2) $5\cdot25^{\frac{1}{x}}+3\cdot10^{\frac{1}{x}}\geqslant2\cdot4^{\frac{1}{x}}$.

**3.20.*** Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot16^{x}+2\cdot81^{x}-5\cdot36^{x}<0$;
2) $2\cdot49^{\frac{1}{x}}-9\cdot14^{\frac{1}{x}}+7\cdot4^{\frac{1}{x}}\geqslant0$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**3.21.** Чому дорівнює значення виразу $\frac{2\sin\alpha+\sin2\alpha}{2\sin\alpha-\sin2\alpha}$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{5}$?

**3.22.** Знайдіть значення виразу $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, якщо $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

# 4. Логарифм і його властивості

Легко розв'язати рівняння $2^{x}=4$ і $2^{x}=8$. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^{x}=5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці $A(x_0; 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь $x_0$.

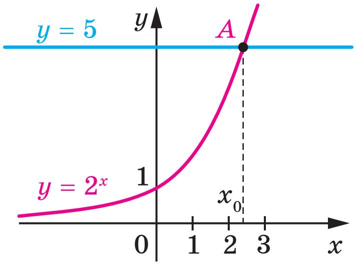



**Рис. 4.1**

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа 5 з основою 2** та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

**Означення. Логарифмом додатного числа *b* з основою *a*, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число *a*, щоб отримати число *b*.**

Логарифм числа $b$ з основою $a$ позначають $\log_a b$.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ оскільки } 17^1 = 17;$$
$$\log_{100} 1 = 0, \text{ оскільки } 100^0 = 1;$$
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ оскільки } 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю.**

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

**Теорема 4.1 (логарифм добутку).** ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.*

*Доведення.* Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність і властивості степеня, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо, що $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

**Теорема 4.2 (логарифм частки).** ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.*

**Теорема 4.3 (логарифм степеня).** ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

**Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої).** ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

**Наслідок 1.** ***Якщо** $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, **то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

**Наслідок 2.** ***Якщо** $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, **то для будь-якого** $\beta \neq 0$ **виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

**Задача 1.** Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $4^{2x-5} = 9$.

*Розв'язання.* 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_4 9$; $2x = \log_4 9 + 5$; $x = \frac{\log_4 9 + 5}{2}$.

*Відповідь*: 1) $\log_3 7$; 2) $\frac{\log_4 9 + 5}{2}$. ◄

**Задача 2.** Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

*Розв'язання.* 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \blacktriangleleft$$

**Задача 3.** Обчисліть значення виразу $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$.

*Розв'язання.* Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \blacktriangleleft$$

**?**

1. Що називають логарифмом додатного числа $b$ з основою $a$, де $a > 0$, $a \neq 1$?
2. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
3. Сформулюйте теорему про логарифм добутку.
4. Сформулюйте теорему про логарифм частки.
5. Сформулюйте теорему про логарифм степеня.
6. Сформулюйте теорему про перехід від однієї основи логарифма до іншої та наслідки з неї.

## ВПРАВИ

**4.1.°** Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$;

2) $\log_{25} 5 = 2$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 6) $\lg 0,0001 = -4$?

**4.2.°** Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

**4.3.°** Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

**4.4.°** Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

**4.5.°** Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

**4.6.°** Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;

2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

**4.7.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x = -1$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 5) $\log_x 9 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 x = 0$; 6) $\log_x 2 = 2$.

**4.8.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

**4.9.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x = 2$; 3) $0,4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0,3^{3x+2} = 7$.

**4.10.**° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

**4.11.**° Обчисліть:

1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0{,}45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$.

**4.12.**° Обчисліть:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$.

**4.13.**° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$; 3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;

2) $\log_5 100 - \log_5 4$; 4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$.

**4.14.**° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$.

**4.15.**• Обчисліть:

1) $64^{0{,}5\log_2 12}$; 3) $6^{1+\log_6 5}$; 5) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$; 7) $8^{1-\log_2 3}$;

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8 - 2}$; 6) $2^{3\log_2 5 + 4}$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$.

**4.16.**• Обчисліть:

1) $4^{\log_2 9}$; 3) $10^{2+\lg 8}$; 5) $2^{4\log_2 3 - 1}$; 7) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$.

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6 - 3}$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}$;

**4.17.**• Обчисліть:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 4) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$; 5) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;

3) $\log_9 \log_2 8$; 6) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

**4.18.**• Обчисліть:

1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 3) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;

2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$; 4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

**4.19.**• Знайдіть $x$, якщо:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$;
2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;
3) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;
4) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$.

**4.20.**• Знайдіть $x$, якщо:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$;
2) $\lg x = \frac{2}{5}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 64 + 1$.

**4.21.**•• Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$;
2) $\dfrac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$;
3) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;
4) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

**4.22.**•• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$;
2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$;
3) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;
4) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

**4.23.**•• Обчисліть:

1) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$;
2) $7^{2\log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$;
3) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$;
4) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$;
5) $\lg(25^{\log_5 0{,}8} + 9^{\log_3 0{,}6})$;
6) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

**4.24.**•• Обчисліть:

1) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_{\frac{1}{6}} 3}$;
2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$;
3) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$;
4) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3}\right)$.

**4.25.**•• Знайдіть значення виразу

$$\lg\sin 1^\circ \cdot \lg\sin 2^\circ \cdot \lg\sin 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89^\circ \cdot \lg\sin 90^\circ.$$

**4.26.**•• Спростіть вираз $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9$.

**4.27.**•• Обчисліть значення виразу $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

**4.28.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_x 1;$ 3) $y = 5^{-\log_5 x};$ 5) $y = 2^{\log_2 x^2};$

2) $y = 3^{\log_3 (x+3)};$ 4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}};$ 6) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}.$

**4.29.**•• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)};$ 3) $y = \log_x x;$

2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)};$ 4) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}.$

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**4.30.** Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^{0,5}+3b^{0,5}}{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}+\dfrac{a^{0,5}-3b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{2}.$

**4.31.** Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x};$ 2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3.$

# 5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число $a$, відмінне від 1. Кожному додатному числу $x$ можна поставити у відповідність число $y$ таке, що $y = \log_a x$. Тим самим задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Розглянемо основні властивості логарифмічної функції.

- *Функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.
- *Функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості.*
  *Якщо* $a > 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(0;\ 1)$; $y > 0$ *на проміжку* $(1; +\infty)$;
  *якщо* $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *на проміжку* $(1; +\infty)$; $y > 0$ *на проміжку* $(0;\ 1)$.
- *Функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та є спадною при* $0 < a < 1$.
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 5.1 і 5.2 схематично зображено графік логарифмічної функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

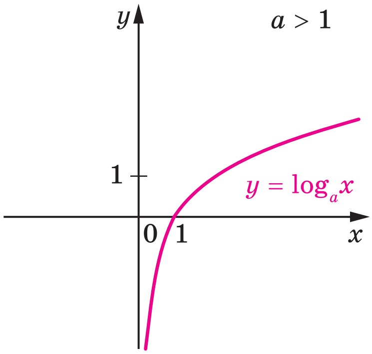



Рис. 5.1

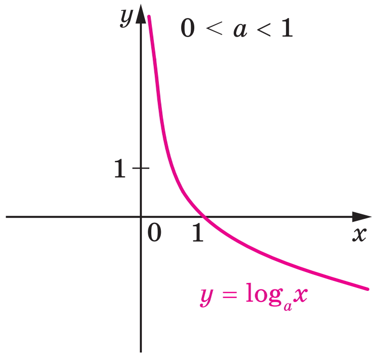



Рис. 5.2

Зазначимо важливу властивість графіка логарифмічної функції $y = \log_a x$. З наближенням значень $x$ до нуля відстані від точок графіка функції $y = \log_a x$ до осі ординат стають усе меншими й меншими та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюють нулю.

**Задача 1.** Порівняйте числа:

1) $\log_2 6$ і $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0.

*Розв'язання.* 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_2 x$ є зростаючою, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$. ◄

**Задача 2.** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \log_{x-4} (16 - x)$.

*Розв'язання.* 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x+3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.

Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши системи нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

1. Яку функцію називають логарифмічною?
2. Сформулюйте властивості логарифмічної функції.
3. Зобразіть схематично графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$.

## ВПРАВИ

**5.1.°** Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{0,1} x$; 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

2) $y = \log_3 x$; 4) $y = \lg x$; 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$?

**5.2.°** Спираючись на яку властивість логарифмічної функції можна стверджувати, що:

1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

**5.3.°** Порівняйте:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$;

2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$.

**5.4.°** Порівняйте:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ і $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;

2) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$; 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ і $\lg \frac{\pi}{4}$.

**5.5.°** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$; 4) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$; 5) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;

3) $f(x) = \log_4 (-x)$; 6) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$.

**5.6.°** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;
2) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;
3) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$.

**5.7.•** Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

**5.8.•** Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

**5.9.•** Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_{\pi} 3$?

**5.10.•** Порівняйте з нулем:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

**5.11.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

**5.12.•** Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

**5.13.•** На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює $-1$?

**5.14.•** На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює $-1$, а найменше дорівнює $-2$?

**5.15.•** Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і $-2$; 3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6.

**5.16.•** Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1;
2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$.

**5.17.•** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \lg x^2$;
2) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{\lg x}$; 4) $f(x)=\dfrac{4}{\log_5(10-x)}$.

**5.18.**• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\log_{12}|x|$; 2) $y=\dfrac{5}{\lg(x+3)}$; 3) $y=\lg\sin x$.

**5.19.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x=3-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-1$; 3) $\log_2 x=-x-0{,}5$.

**5.20.**• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x=x+\dfrac{1}{2}$; 2) $\log_3 x=4-x$.

**5.21.**• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x=-x$; 2) $\log_3 x=-x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=\sqrt{x}$.

**5.22.**• Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$; 2) $\log_2 x=\dfrac{1}{x}$?

**5.23.**•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

**5.24.**•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

**5.25.**•• Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3$ і $\log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8$ і $\log_{0,8} 0{,}7$.

**5.26.**•• Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ і $\log_{1,8} 1{,}7$; 2) $\log_{0,2} 0{,}3$ і $\log_{0,3} 0{,}2$.

**5.27.**•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\lg(1-\sin x)$;

2) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;

3) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

4) $y=\dfrac{1}{\log_6(x-3)}+\sqrt{6-x}$;

5) $y=\dfrac{4}{\lg(x+2)}+\lg(3-x)$;

6) $y=\log_5(x^2-4x+3)+\dfrac{1}{\log_5(7-x)}$;

7) $y=\lg(6x-x^2)+\dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

8) $y=\log_{x+3}(x^2+x)$.

**5.28.••** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

4) $y = \lg(x+8) - \dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

5) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

6) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$.

**5.29.*** Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

2) $y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3$.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

**5.30.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+15} = x+1$;

2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0$;

5) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;

6) $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$.

## 6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням**. Це рівняння можна розв'язати, використовуючи означення логарифма.

**Задача 1.** Розв'яжіть рівняння $\log_3(3x-1) = 2$.

*Розв'язання.* За означенням логарифма можна записати: $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \dfrac{10}{3}$.

*Відповідь*: $\dfrac{10}{3}$. ◄

Розв'язання рівняння прикладу 1 можна подати таким чином:

$$\log_3(3x-1) = 2\log_3 3,$$
$$\log_3(3x-1) = \log_3 3^2,$$
$$3x - 1 = 3^2,\quad x = \frac{10}{3}.$$

Під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

**Теорема 6.1.** ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння виду***

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

***рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

**Задача 2.** Розв’яжіть рівняння $\lg(2x - 3) = \lg(x^2 - 4x + 2)$.

*Розв’язання.* Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2x - 3 = x^2 - 4x + 2, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x = 5$.

*Відповідь*: 5. ◄

**Задача 3.** Розв’яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

*Розв’язання.* Дане рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$ Отримуємо: $x = 5$.

*Відповідь*: 5. ◄

**Задача 4.** Розв’яжіть рівняння $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

*Розв’язання.* Оскільки $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Нехай $\log_2 x = t$. Тоді отримуємо: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Звідси $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

*Відповідь*: $\sqrt{2}$; 4. ◄

1. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним рівнянням?
2. Якій системі рівносильне рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$?

## ВПРАВИ

**6.1.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 (x - 1) = 1$;
2) $\log_3 (2x + 1) = 3$;
3) $\lg (3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x - 8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$.

**6.2.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x + 7) = -3$;
2) $\log_4 (2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$.

**6.3.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;
2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$.

**6.4.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 7) = \log_{\frac{1}{4}} (2x + 5)$.

**6.5.•** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $2\log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = 6{,}5$;
4) $\log_6 x + 2\log_{36} x + 3\log_{216} x = 3$;

5) $\log_7 \log_4 (x-2) = 0$; 6) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

**6.6.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$; 3) $\lg\lg\lg x = 0$.

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

**6.7.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;
2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;
3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x-2)$;
4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$.

**6.8.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;
2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$.

**6.9.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 (x-3) + \log_4 x = 1$;
2) $\log_{0,5} (4-x) + \log_{0,5} (x-1) = -1$;
3) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x-4) = 2$;
4) $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(1,5x - 3)$.

**6.10.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x + \log_7 (x+6) = 1$;
2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3,5$;
4) $\log_{0,6} (x+2) + \log_{0,6} (6-x) = \log_{0,6} (x+8)$.

**6.11.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$; 3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$; 4) $\frac{2}{\lg(x+2) - 3} + \frac{4}{\lg(x+2) + 1} = 1$.

**6.12.**• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_8^2(-x) - 2\log_8(-x) - 1 = 0$; 3) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10$;

2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$; 4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$.

**6.13.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$; 3) $2\log_8 (1-x) = \log_8 (2,5x + 1)$;
2) $2\log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$; 4) $2\log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$.

**6.14.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2\log_{0,7}(x + 2)$;

2) $2\log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1$.

**6.15.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2)$;

2) $2\log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17)$.

**6.16.**•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1)$;

2) $2\lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5)$.

**6.17.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$;

2) $\log_{x+1}(x + 3) = 2$;

3) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$;

4) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$.

**6.18.*** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

2) $\log_x(x + 6) = 2$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**6.19.** Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x + 4}$;

2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}$.

**6.20.** Знайдіть проміжки зростання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5}$.

**6.21.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

# 7. Логарифмічні нерівності

Розв'язування багатьох логарифмічних нерівностей ґрунтується на такій теоремі.

**Теорема 7.1.** ***Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

***Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

**Задача 1.** Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > 3$.

*Розв'язання.* Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x > 8$.

*Відповідь:* $(8; +\infty)$. ◀

**Задача 2.** Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

*Розв'язання.* Маємо: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$

*Відповідь:* $(0; 0,3]$. ◀

**Задача 3.** Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$.

*Розв'язання.* Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

*Відповідь:* $(2; +\infty)$. ◀

Якій системі нерівностей рівносильна нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

## ВПРАВИ

**7.1.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$.

**7.2.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x)<\log_{\frac{8}{11}}2$; 6) $\log_{0,9}(2x+1)>\log_{0,9}5$.

**7.3.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x>2$;
2) $\log_5 x\leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}}x>1$;
5) $\log_2(5x+1)>4$;
6) $\log_{0,6}(x-2)<2$;
7) $\log_3(2x-1)\leqslant 3$;
8) $\log_{0,5}(2x+1)\geqslant -2$.

**7.4.°** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}}x<-1$;
2) $\log_4 x>2$;
3) $\lg x<5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}}x>-3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)\geqslant -2$;
6) $\log_9(5x+6)\leqslant 2$.

**7.5.•** Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $\log_{0,25}(3x-5)>-3$; 2) $\log_3(7-x)<3$?

**7.6.•** Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

1) $\log_{0,5}(1-x)>-1$; 2) $\log_{36}(x+1)\leqslant 0,5$.

**7.7.•** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg(2x+3)>\lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x<\log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1)>\log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3)<\log_{0,4}(x+3)$;
5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

**7.8.•** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;
2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;
3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;
4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$.

**7.9.••** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;
3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;
4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;
5) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;
6) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$.

**7.10.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;
2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0{,}5$;
3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;
4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
5) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
6) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant\log_{0,1}(x+1)$.

**7.11.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$.

**7.12.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

**7.13.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log^2_{0,2}x\leqslant 1$;
2) $\log^2_{\frac{1}{3}}x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log^2_{\frac{1}{4}}x+2\log_{\frac{1}{4}}x-8\leqslant 0$;
5) $\log^2_2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log^2_{\frac{1}{9}}x-5\log_{\frac{1}{9}}x+2\geqslant 0$.

**7.14.**•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log^2_{0,5}x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log^2_4 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log^2_{0,2}x-\log_{0,2}x-2\leqslant 0$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**7.15.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^3-3x^2+1$ на проміжку $[-2;\ 1]$.

**7.16.** У якій точці графіка функції $f(x)=x^3-x^2-2x$ дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\alpha=\frac{3\pi}{4}$?

**7.17.** Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2-x+2$, яка паралельна прямій $x+y+2=0$.

# 8. Похідні показникової та логарифмічної функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати функцію $f$, визначену на $\mathbb{R}$, відмінну від нульової константи, таку, що $f'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

Виявляється, що серед показникових функцій $f(x) = a^x$ існує єдина функція така, що $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Число, яке є основою степеня для цієї функції, позначають буквою $e$, а сама функція має вигляд $f(x) = e^x$. Отже,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, що число $e$ ірраціональне. Його можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$e = 2{,}71828182845\ldots\ .$$

Функцію $f(x) = e^x$ називають **експонентою**.

Логарифм з основою $e$ називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Можна довести, що похідна показникової функції $f(x) = a^x$ дорівнює $a^x \ln a$.

Отже, при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

У п. 5 ми зазначили, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною.

Можна довести, що

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Зокрема,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

**Задача 1.** Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^x (x^2 - 4x)$;  2) $y = x^3 \cdot 3^x$;  3) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$.

*Розв'язання.* 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$

$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Маємо:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

3) Маємо: $y' = \dfrac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \dfrac{4x^3 \cdot \ln x - \dfrac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}. ◄$$

**Задача 2.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^x + x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

*Розв'язання.* Маємо: $f(x_0) = 1$. Знайдемо похідну функції $f$ у точці $x_0 = 0$: $f'(x) = e^x + 1$. Звідси $f'(x_0) = 2$. Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 2x + 1$.

*Відповідь*: $y = 2x + 1$. ◄

**Задача 3.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = x \ln x$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак $f'(x)$ на $D(f) = (0; +\infty)$.

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \dfrac{1}{e}$.

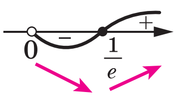



**Рис. 8.1**

Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція $f$ зростає на проміжку $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$ (рис. 8.1). ◄

1. Яку функцію називають експонентою?
2. Що називають натуральним логарифмом?
3. Чому дорівнює похідна функції $y = e^x$? $y = a^x$?
4. Чому дорівнює похідна функції $y = \ln x$? $y = \log_a x$?

## ВПРАВИ

**8.1.°** Знайдіть похідну функції:

1) $y = 4e^x$; 3) $y = e^x \sin x$; 5) $y = 5^x$;

2) $y = x^2 e^x$; 4) $y = \frac{e^x}{x-2}$; 6) $y = x \cdot 3^x$.

**8.2.°** Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^6 e^x$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = \frac{x+1}{e^x}$; 4) $y = 6^x$.

**8.3.°** Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_9 x$; 2) $y = \frac{\ln x}{x^3}$; 3) $y = x^5 \ln x$.

**8.4.°** Знайдіть похідну функції:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \frac{x^5}{\ln x}$.

**8.5.•** Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$.

**8.6.•** Знайдіть похідну функції:

1) $y = 10^{-x}$; 2) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$.

**8.7.•** Обчисліть значення похідної функції $f$ у точці $x_0$:

1) $f(x) = e^x - 3x$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$, $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, $x_0 = 4$;

**8.8.•** Обчисліть значення похідної функції $f$ у точці $x_0$:

1) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

2) $f(x) = \frac{1}{6}\ln x$, $x_0 = \frac{1}{6}$;

**8.9.•** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f$ у точці з абсцисою $x_0$:

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$.

**8.10.•** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f$ у точці з абсцисою $x_0$:

1) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$.

**8.11.•** Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$;  2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

**8.12.•** Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

**8.13.••** Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = ex - 6$;

2) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$.

**8.14.••** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - x$;  4) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$;  7) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}$;

2) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;  5) $f(x) = x^3 \ln x$;  8) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$;  6) $f(x) = \ln x - x$;

**8.15.••** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3^x}$;  3) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;  5) $f(x) = 2\ln x + \dfrac{2}{x}$;

2) $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$;  4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;  6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

**8.16.••** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = e^x + x$ на проміжку $[-1; 1]$.

**8.17.••** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = (x-1)\,e^{-x}$ на проміжку $[1; 3]$.

**8.18.••** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = xe^x$;  2) $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

**8.19.••** Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ та побудуйте її графік.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**8.20.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \cos x - 1$;  2) $\cos 2x = \sin x$.

**8.21.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 1 + \sqrt{x+5}$ і $y = x$;  2) $y = 2 - 2\sqrt{x+5}$ і $y = -x$.

## МОЯ ЛЮБОВ — УКРАЇНА І МАТЕМАТИКА

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві (див. форзац 1).

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію, а потім математичне відділення Київського університету, він залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій та математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був значною мірою використаний американськими вченими під час створення першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним із перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук навчальній роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативи в 1935 р. було проведено першу Київську математичну олімпіаду для школярів. Спробуйте свої сили в розв'язанні задач цієї олімпіади.

### Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

**1.** Обчисліть значення виразу $\frac{b^3 - a^3 b - b^2 c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

**2.** Розв'яжіть рівняння $4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20{,}75} = \sqrt{2}$.

**3.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

**4.** Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

**5.** Нехай $a$ і $b$ — катети прямокутного трикутника, $c$ — його гіпотенуза. Доведіть, що

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

## ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

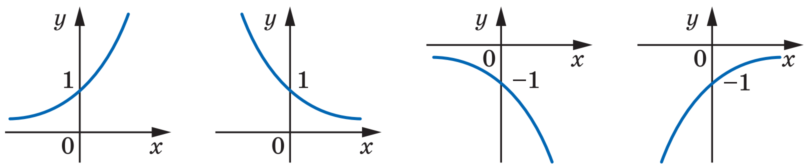
**1.** Яка область визначення функції $y=\frac{7}{7^x-1}$?

А) $(-\infty;+\infty)$; В) $(-\infty;7)\cup(7;+\infty)$;

Б) $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; Г) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

**2.** На одному з рисунків зображено графік функції $y=3^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

А) Б) В) Г)




**3.** Чому дорівнює корінь рівняння $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^x=\frac{4}{9}$?

А) 2; Б) –2; В) 1; Г) –1.

**4.** Знайдіть множину розв'язків нерівності $0{,}6^{x^2}>0{,}6$.

А) $(-\infty;1)$; В) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

Б) $(1;+\infty)$; Г) $(-1;\ 1)$.

**5.** Розв'яжіть рівняння $3^{x+3}+5\cdot3^{x-1}=86$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

**6.** Обчисліть значення виразу $\log_{0,2}25-\log_3\frac{1}{27}$.

А) 1; Б) –1; В) 5; Г) –5.

**7.** Подайте число 3 у вигляді степеня числа 10.

А) $3=10^{\log_3 10}$; В) $3=10^{\lg 3}$;

Б) $3=10^{\log_3 3}$; Г) подати неможливо.

**8.** Чому дорівнює значення виразу $\log_6 108-\log_6 3$?

А) –1; Б) 2; В) –3; Г) 4.

**9.** Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}x>\log_{0,2}5$.

А) $(-\infty;5)$; В) $(0;5)\cup(5;+\infty)$;

Б) $(5;+\infty)$; Г) $(0;\ 5)$.

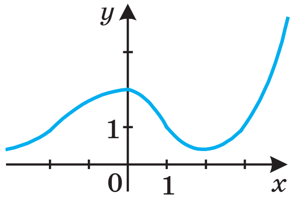
**10.** Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

А) (2; 1); Б) (2; −1); В) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; Г) (2; 0).

**11.** При яких значеннях $a$ і $b$ виконується рівність $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$?

А) $a > 0,\ b < 0$; В) $a < 0,\ b < 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0$; Г) таких значень не існує.

**12.** На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки коренів має рівняння $\ln f(x) = 0$?




А) Жодного кореня;
Б) два корені;
В) три корені;
Г) визначити неможливо.

**13.** Укажіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,2}(3 - 2x) < -1$.

А) −2; Б) −1; В) 1; Г) такого розв'язку не існує.

**14.** Яка множина розв'язків нерівності $\log_x \sqrt{x} < 1$?

А) $(-\infty; +\infty)$; Б) $(0; +\infty)$; В) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $\varnothing$.

**15.** Розв'яжіть рівняння $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

А) 0; 5; Б) 0; В) 5; Г) 1; 4.

**16.** Порівняйте значення виразів $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$.

А) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; В) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
Б) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; Г) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

**17.** Знайдіть похідну функції $y = x^3 e^x$.

А) $y' = 3x^2 e^x$; В) $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$;
Б) $y' = 3x^2 e^x - x^3 e^x$; Г) $y' = x^3 e^x \ln 3$.

**18.** Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

А) $(-\infty; 0)$, $(1; \sqrt{e}]$; В) $(0; \sqrt{e}]$;
Б) $(0; 1)$, $(1; \sqrt{e}]$; Г) $(0; 1)$.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

**Властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$**

| | |
|---|---|
| Область визначення | $\mathbb{R}$ |
| Область значень | $(0; +\infty)$ |
| Нулі функції | – |
| Проміжки знакосталості | $y > 0$ на $\mathbb{R}$ |
| Зростання/спадання | Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною |
| Диференційовність | Диференційовна |

**Показникові рівняння**

При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

**Показникові нерівності**

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

**Логарифм і його властивості**

Логарифмом додатного числа $b$ з основою $a$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число $a$, щоб отримати число $b$.

Основна логарифмічна тотожність:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконуються рівності:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b$.

**Властивості функції $y = \log_a x$**

| | |
|---|---|
| Область визначення | $(0; +\infty)$ |
| Область значень | $\mathbb{R}$ |
| Нулі функції | $x = 1$ |
| Проміжки знакосталості | Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0;\ 1)$, $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$, $y > 0$ на проміжку $(0;\ 1)$ |
| Зростання / спадання | Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною |
| Диференційовність | Диференційовна |

**Логарифмічні рівняння**

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

**Логарифмічні нерівності**

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

**Похідні показникової та логарифмічної функцій**

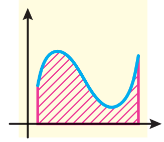
$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

# §2 ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з операцією, оберненою до диференціювання, і вивчите властивості цієї операції.

Ви розширите клас фігур, площі яких зможете знаходити. Ознайомитеся з поняттям «визначений інтеграл» і з'ясуєте його геометричний зміст.

## 9. Первісна

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

**Означення.** **Функцію $F$ називають первісною функцією (або коротко первісною) функції $f$ на проміжку $I$, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок $I$ опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Наведемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де $C$ — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

**Теорема 9.1 (основна властивість первісної).** ***Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $C$ — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

***також є первісною функції $f$ на проміжку $I$.***

***Будь-яку первісну функції $f$ на проміжку $I$ можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де $C$ — деяке число.***

Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$, то запис $F(x) + C$, де $C$ — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції $f$ на проміжку $I$.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

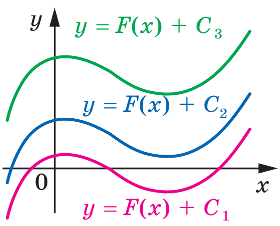


**Рис. 9.1**

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку $I$ називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

**Задача 1.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

*Розв'язання.* Користуючись таблицею первісних, отримуємо, що однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді згідно з теоремою 9.1 запис $\frac{x^6}{6} + C$, де $C$ — довільне число, є загальним виглядом первісних. ◄

З розв'язання задачі 1 випливає, що

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

**Задача 2.** Для функції $f(x) = \cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

*Розв'язання.* Користуючись таблицею первісних, отримуємо, що шукана первісна має вигляд $F(x) = \sin x + C$, де $C$ — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $\sin\frac{\pi}{6} + C = 3$. Ураховуючи, що $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, знаходимо: $C = 2,5$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = \sin x + 2,5$. ◄

**?**

1. Яку функцію називають первісною функції $f$ на проміжку $I$?
2. Сформулюйте основну властивість первісної.
3. Який запис називають загальним виглядом первісних?
4. Що називають невизначеним інтегралом? Як його позначають?

## ВПРАВИ

**9.1.°** Установіть, чи є функція $F$ первісною функції $f$:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

**9.2.°** Доведіть, що функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;

3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$.

**9.3.°** Чи є функція $F(x) = \frac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-6; 0)$?

**9.4.°** Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[1; +\infty)$;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty; -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

**9.5.°** Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=0$;
2) $f(x)=x^8$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0;+\infty)$;
5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4;+\infty)$;
6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0{,}5;+\infty)$.

**9.6.•** Для функції $f$ знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:
1) $f(x)=x^2$, $A\ (-1;\ 3)$;
2) $f(x)=\sin\ x$, $B\ (\pi;\ -1)$;
3) $f(x)=e^x$, $C\ (0;\ -6)$.

**9.7.•** Для функції $f$ знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x)=x^3$, $M\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$;

2) $f(x)=\cos\ x$, $N\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5}{2}\right)$;

3) $f(x)=3^x$, $K\left(2;\dfrac{9}{\ln 3}\right)$.

**9.8.•** Для функції $f$ знайдіть на проміжку $I$ первісну $F$, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=-9$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $I=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I=(-\infty;0)$, $F(-e^3)=7$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $I=(-\infty;0)$, $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$.

**9.9.•** Для функції $f$ знайдіть на проміжку $I$ первісну $F$, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$, $F(16)=10$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2$;

3) $f(x)=2^x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(5)=1$.

**9.10.**•• Укажіть на рисунку 9.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \cos 3$.

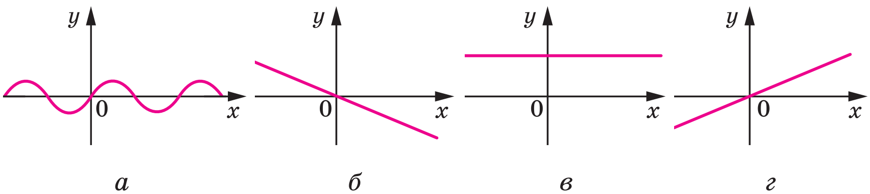



**Рис. 9.2**

**9.11.**•• Укажіть на рисунку 9.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x) = \ln 2$.

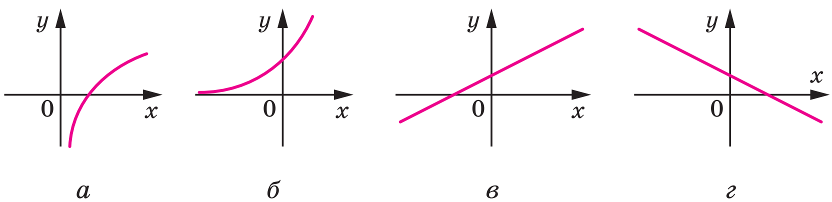



**Рис. 9.3**

**9.12.**•• Для функції $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками графіків яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**9.13.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 (1{,}5x - 3) \leqslant 1 + 2\log_2 0{,}3$;

2) $\log_{0{,}4} (3{,}5 - 5x) \geqslant 2\log_{0{,}4} 0{,}2 - 1$.

**9.14.** Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha \sin(\pi + \alpha)}$;

2) $\dfrac{2\cos^2 \alpha}{1 + \sin(\pi + \alpha)} + 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

# 10. Правила знаходження первісної

Під час знаходження похідних функцій ви користувалися правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо правила знаходження первісних.

**Теорема 10.1.** ***Якщо функції $F$ і $G$ є відповідно первісними функцій $f$ і $g$ на проміжку $I$, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.***

*Доведення.* З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх $x$ із проміжку $I$ маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$ на проміжку $I$. ◄

З теореми 10.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

де $C$ — довільне число.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

**Теорема 10.2.** ***Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $k$ — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Тепер можна записати:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де $C$ — довільне число.

**Задача 1.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^2 + \cos x$.

*Розв'язання.* Первісною функції $y = x^2$ є функція $y = \frac{x^3}{3}$. Первісною функції $y = \cos x$ є функція $y = \sin x$.

Скориставшись теоремою 10.1, отримуємо, що функція $y = \frac{x^3}{3} + \sin x$ є первісною заданої в умові функції $f$. Тоді запис $\frac{x^3}{3} + \sin x + C$ є загальним виглядом первісних функції $f$. ◄

**Задача 2.** Для функції $f(x) = 5 \sin x$ знайдіть первісну $F$, яка задовольняє умову $F(0) = 0$.

*Розв'язання.* Первісною функції $y = \sin x$ є функція $y = -\cos x$. Скориставшись теоремою 10.2, отримуємо, що функція $y = -5 \cos x$ є первісною заданої в умові функції $y = 5 \sin x$. Тоді існує таке число $C$, що $F(x) = -5 \cos x + C$. Знайдемо число $C$ з умови $F(0) = 0$. Маємо: $-5 \cos 0 + C = 0$. Звідси $C = 5$.

*Відповідь*: $F(x) = -5 \cos x + 5$. ◄

**Задача 3.** Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t) = 3t^2 + 4t$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ м (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах).

*Розв'язання.* Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty)$. Тоді можна записати:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + C,$$

де $C$ — деяке число. Знайдемо число $C$ з умови $s(0) = 3$. Маємо:

$$t^3 + 2t^2 + C = 3, \text{ звідси } C = 3.$$

Отже, шуканий закон руху задається формулою

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 3. ◄$$

1. Як знайти первісну функції $y = f(x) + g(x)$?
2. Як знайти первісну функції $y = kf(x)$, де $k$ — деяке число?

## ВПРАВИ

**10.1.°** Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5 \sin x + \cos x$;
4) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
5) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
8) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

**10.2.°** Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

4) $f(x)=\dfrac{9}{\cos^2 x}-3\sin x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $f(x)=5\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0;+\infty)$;

6) $f(x)=\dfrac{9}{x^{10}}+\dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty;0)$.

**10.3.**$^\bullet$ Для функції $f$ на проміжку $I$ знайдіть первісну $F$, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x)=1-2x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(3)=2$;

2) $f(x)=3x^2-4x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(1)=4$;

3) $f(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$;

4) $f(x)=(2-3x)^2$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(1)=0$.

**10.4.**$^\bullet$ Для функції $f$ на проміжку $I$ знайдіть первісну $F$, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x)=3-6x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $A(-1;\ 0)$;

2) $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $I=(-\infty;+\infty)$, $B(1;\ 5)$;

3) $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$, $C(4;\ 10)$;

4) $f(x)=2\sin x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $D\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

**10.5.**$^\bullet$ Для функції $f(x)=4x^3+4x$ знайдіть первісну $F$, один із нулів якої дорівнює $-1$. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

**10.6.**$^\bullet$ Для функції $f(x)=x^2-12$ знайдіть первісну $F$, один із нулів якої дорівнює 3.

**10.7.**$^{\bullet\bullet}$ Функції $F_1$ і $F_2$ є первісними функції $f(x)=5x^4-3x^2-2$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Графік функції $F_1$ проходить через точку $A(1;\ 2)$, а функції $F_2$ — через точку $B(0;\ 5)$. Графік якої з функцій, $F_1$ або $F_2$, розташований вище?

**10.8.**$^{\bullet\bullet}$ Функції $F_1$ і $F_2$ є первісними функції $f(x)=(2x-1)^2$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Графік функції $F_1$ проходить через точку $A(2;\ 6)$, а функції $F_2$ — через точку $B(-1;\ 1)$. Графік якої з функцій, $F_1$ або $F_2$, розташований вище?

**10.9.**$^{\bullet\bullet}$ Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t)=t^2+2t-3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t=0$ точка знаходилася в початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

**10.10.**•• Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка в будь-який момент часу $t$ визначається за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

**10.11.**•• Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

**10.12.**•• Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**10.13.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;

2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$.

**10.14.** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2{,}5x)$;

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$.

## 11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію $f$, яка є неперервною на проміжку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції $f$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 11.1 наведено приклади криволінійних трапецій.

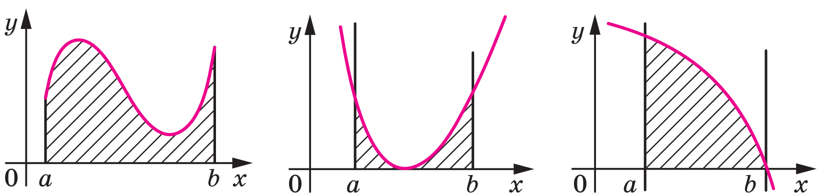



**Рис. 11.1**

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

**Теорема 11.1.** ***Площу $S$ криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

***де $F$ — будь-яка первісна функції $f$ на проміжку $[a; b]$.***

**Задача 1.** Знайдіть площу $S$ фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

*Розв'язання.* На рисунку 11.2 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

*Відповідь:* $\frac{1}{2}$. ◄

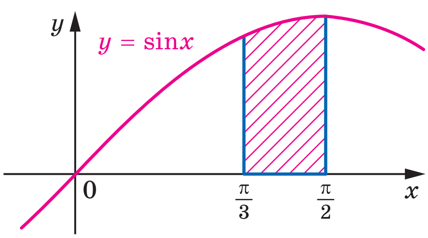



**Рис. 11.2**

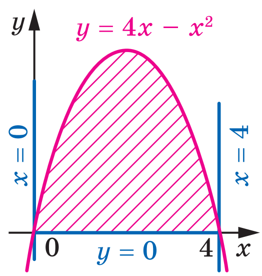



**Рис. 11.3**

**Задача 2.** Знайдіть площу $S$ фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

*Розв'язання.* Графік функції $f$ перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 11.3). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції $f$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції $f$ на проміжку $[0; 4]$ є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

*Відповідь*: $\frac{32}{3}$. ◄

**Означення. Нехай $F$ — первісна функції $f$ на проміжку $I$, числа $a$ і $b$, де $a < b$, належать проміжку $I$. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції $f$ на проміжку $[a; b]$.**

Визначений інтеграл функції $f$ на проміжку $[a; b]$ позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від $a$ до $b$ еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

де $F$ — довільна первісна функції $f$ на проміжку $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел $a$ і $b$, де $a < b$, можна записати:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції $f$ вибрано. Справді, кожну первісну $G$ функції $f$ на проміжку $I$ можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де $C$ — деяке число. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(b).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну $F$ функції $f$ на проміжку $[a; b]$;

2) обчислити значення первісної $F$ у точках $x = b$ і $x = a$;

3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

**Задача 3.** Обчисліть $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx$.

*Розв'язання.* Маємо:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

*Відповідь*: $6\frac{8}{15}$. ◄

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею $S$ криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Ця формула виражає **геометричний зміст визначеного інтеграла.**

?

1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
2. За якою формулою обчислюють площу криволінійної трапеції?
3. Що називають визначеним інтегралом?
4. Запишіть формулу Ньютона—Лейбніца.
5. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?

## ВПРАВИ

**11.1.°** Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.4.

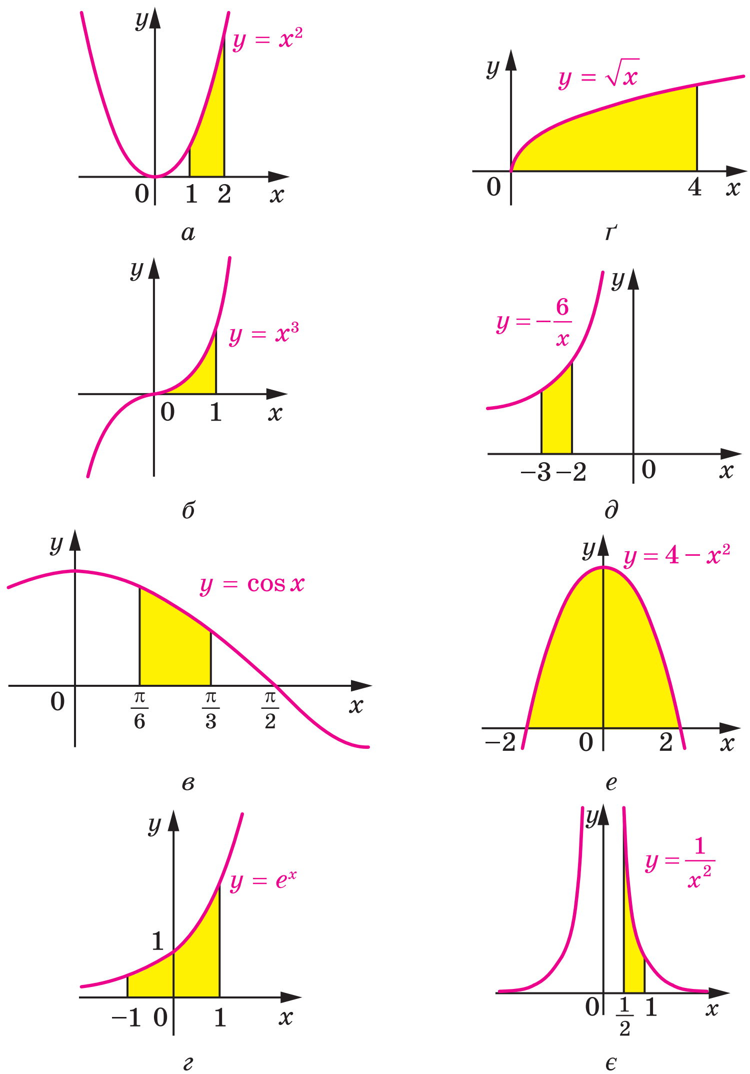



**Рис. 11.4**

**11.2.°** Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.5.

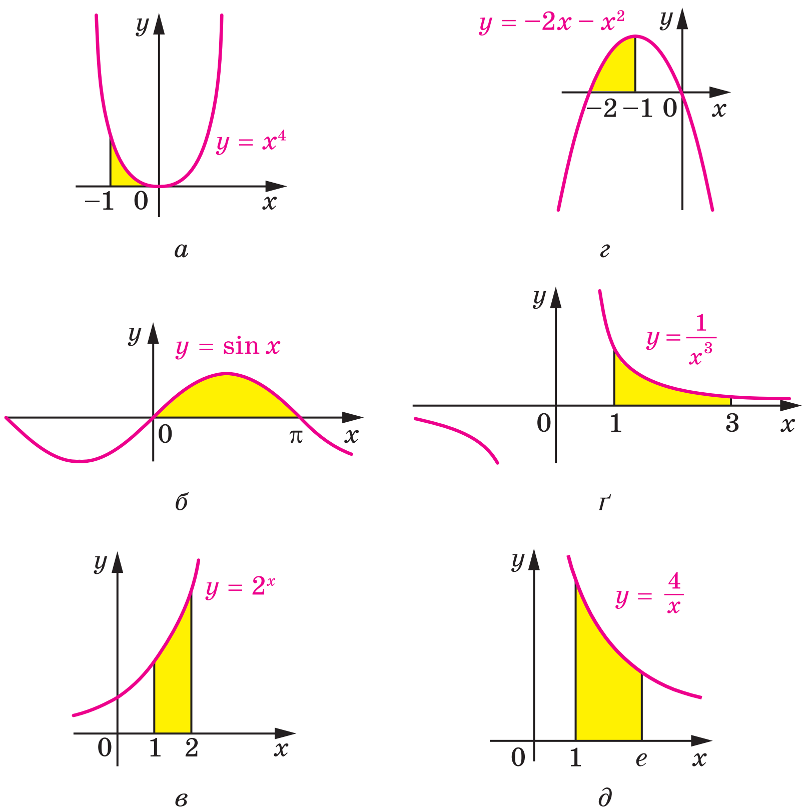



**Рис. 11.5**

**11.3.°** Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_5^7 x\,dx$;

2) $\int\limits_3^8 dx$;

3) $\int\limits_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

6) $\int\limits_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

7) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

8) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_{-2}^3 3^x\,dx$.

**11.4.°** Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} 2\,dx$;
2) $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx$;
3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
4) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;
5) $\int\limits_{0}^{4} e^x\,dx$;
6) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$.

**11.5.•** Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

1) параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;
2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
3) графіком функції $y = -x^3$ і прямими $y = 0$, $x = -2$;
4) параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;
5) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;
6) параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис.

**11.6.•** Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$.

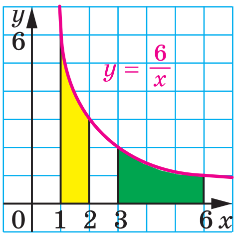


**Рис. 11.6**

**11.7.•** Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку 11.6, рівновеликі.

**11.8.•** Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} (2x + 4)\,dx$;
2) $\int\limits_{0}^{6} (3x^2 - x)\,dx$;
3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$;
4) $\int\limits_{1}^{3} (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;
5) $\int\limits_{-2}^{1} (x - 3)^2\,dx$;
6) $\int\limits_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} - x\right)dx$.

**11.9.•** Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{1} (1 - 5x^4)\,dx$;
2) $\int\limits_{1}^{4} \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;
3) $\int\limits_{0}^{1} (2x - 1)^2\,dx$;
4) $\int\limits_{1}^{4} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

**11.10.**•• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

**11.11.**•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = x^3$ і прямими $y = 8$, $x = 1$;
2) параболою $y = 0{,}5x^2$ і прямою $y = -x$;
3) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 3$;
4) параболою $y = 6 + x - x^2$ і прямою $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4 - x^2$;
6) гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 3$;
7) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = e$, $x = 0$;
8) гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

**11.12.**•• При яких значеннях $a$ виконується нерівність:

1) $\int\limits_0^a (4 - 2x)\,dx < 3$, де $a > 0$;
2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^a 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, де $a > \log_{0,2} 6$?

**11.13.**•• При яких значеннях $a$, більших за $\frac{1}{2}$, виконується нерівність $\int\limits_{\frac{1}{2}}^a \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx > 1{,}5$?

**11.14.*** При яких значеннях $a$ площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

**11.15.*** При яких значеннях $a$ площа фігури, обмеженої лініями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 8?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**11.16.** Обчисліть значення виразу:

1) $(4^{-0,25}-2^{0,5})\left(4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}$.

**11.17.** Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності $x^2-3x<4$.

## «РОЗУМОМ ВІН ПЕРЕВЕРШИВ РІД ЛЮДСЬКИЙ»

Ці величні слова написано нащадками про видатного англійського науковця — фізика й математика Ісаака Ньютона. В історії науки поряд з І. Ньютоном стоїть ще одна гігантська фігура — німецького науковця Ґотфріда Вільгельма Лейбніца, який залишив після себе немеркнучий слід у філософії, математиці, юриспруденції, логіці, дипломатії, історії, політології. Серед великої наукової спадщини цих геніальних учених особливе місце належить досягненням, пов'язаним зі створенням диференціального та інтегрального числення — науки про похідні та первісні.


**Ісаак Ньютон**
(1643–1727)

**Ґотфрід Вільгельм Лейбніц**
(1646–1716)

Варто підкреслити, що Ньютон і Лейбніц створювали свої теорії в той час, коли звичні для нас поняття та терміни або взагалі не існували, або не мали точного змісту. Спробуйте уявити собі підручник з математики, у якому немає термінів «множина», «функція», «дійсне число» тощо. Більш того, багато зручних сучасних позначень тоді ще не набули загальноприйнятого вжитку. Деякі з них Ньютону та Лейбніцу довелося самим винаходити, узагальнювати й пристосовувати до потреб. Наприклад, Лейбніц почав позначати операцію множення крапкою (раніше використовували символи: $\square$, $\times$, $*$, M тощо), операцію ділення — двокрапкою (раніше часто використовували літеру $D$); Ньютон поширив позначення для степеня $a^n$ на випадок цілих та дробових значень $n$, а позначення $\sqrt{x}$ узагальнив до $\sqrt[n]{x}$. Термін «функція» і символ інтеграла «$\int$» уперше зустрічаються в роботах Лейбніца.

Узагалі, історію розвитку математики можна сміливо розділити на дві епохи: до і після появи похідної та інтеграла. Відкриття Ньютона та Лейбніца дали змогу науковцям швидко й легко розв'язувати задачі, які раніше вважалися абсолютно неприступними.

## ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x)=x^4$?

А) $F(x)=4x^3$; Б) $F(x)=\frac{x^5}{5}$; В) $F(x)=x^5$; Г) $F(x)=\frac{x^5}{4}$.

**2.** У якому з наведених випадків функція $F$ є первісною функції $f$?

А) $f(x)=\sin x,\ F(x)=\cos x$; В) $f(x)=x,\ F(x)=1$;
Б) $f(x)=2^x,\ F(x)=2^x\ln 2$; Г) $f(x)=\cos x,\ F(x)=\sin x$.

**3.** Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x)=\frac{4}{x^5}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

А) $-\frac{1}{x^4}$; Б) $-\frac{1}{x^4}+C$; В) $-\frac{20}{x^6}+C$; Г) $-\frac{2}{3x^6}+C$.

**4.** Яка з наведених функцій є первісною функції $f(x)=\frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty;\ -1]$?

А) $F(x)=-1-\ln x$; В) $F(x)=1-\ln(-x)$;
Б) $F(x)=\ln x+1$; Г) $F(x)=\ln(-x)-1$.

**5.** Укажіть загальний вигляд первісних функції $f(x)=e^x-4x^3$ на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$.

А) $e^x+C$; Б) $e^x-12x^2+C$; В) $\frac{e^{x+1}}{x+1}-x^4+C$; Г) $e^x-x^4+C$.

**6.** Функція $F$ є первісною функції $f(x)=x-3$. Через яку з наведених точок проходить графік функції $F$, якщо $F(2)=5$?

А) $(0;\ 8)$; Б) $(-2;\ 17)$; В) $(1;\ 5{,}5)$; Г) $(4;\ 4)$.

**7.** Яка з поданих функцій є первісною функції $f(x)=7^x$?

А) $F(x)=\frac{7^x}{\ln 7}$; В) $F(x)=7^x$;
Б) $F(x)=7^x\ln 7$; Г) $F(x)=\frac{7^{x+1}}{x+1}$.

**8.** Обчисліть інтеграл $\int_0^3 x^2dx$.

А) 27; Б) 9; В) 6; Г) 3.

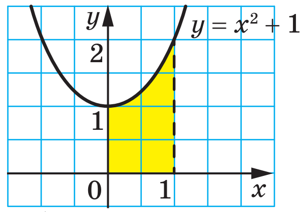
**9.** Обчисліть інтеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$.

А) 0,2; Б) 0,8; В) −0,2; Г) −0,8.

**10.** Обчисліть інтеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) −1.

**11.** Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



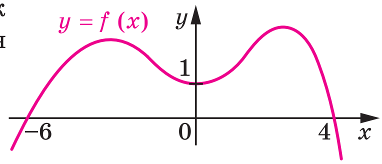

А) $\frac{4}{3}$; В) 1;

Б) $\frac{1}{3}$; Г) 2.

**12.** Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^{4}(f(x)+1)dx$, якщо $\int_{-1}^{4}f(x)dx = 2$.

А) 3; Б) 5; В) 7; Г) 9.

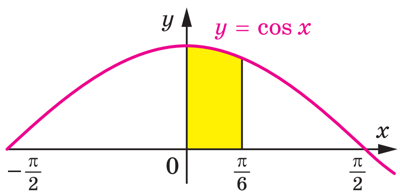
**13.** На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Знайдіть значення виразу $\int_{-6}^{0}f'(x)dx - \int_{0}^{4}f'(x)dx$.




А) 0; В) 1;

Б) 2; Г) знайти неможливо.

**14.** Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



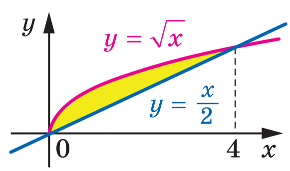

А) $\frac{\pi}{6}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\frac{1}{2}$; Г) 1.

**15.** Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

А) $12\frac{2}{3}$; Б) $14\frac{1}{3}$; В) $14\frac{2}{3}$; Г) $15\frac{1}{3}$.

**16.** Значення якого з наведених інтегралів дорівнює площі зафарбованої фігури, зображеної на рисунку?




А) $\int_{0}^{4}\frac{x}{2}dx$; В) $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$;

Б) $\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx$; Г) $\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$.

**17.** Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 2 - x$.

А) 3,5; Б) 4; В) 4,5; Г) 5.

**18.** При якому значенні $a$ пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{10}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, на дві рівновеликі фігури?

А) 4; Б) 5; В) 10; Г) такого значення не існує.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

**Первісна**

Функцію $F$ називають первісною функцією (або коротко первісною) функції $f$ на проміжку $I$, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

**Основна властивість первісної**

Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $C$ — довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції $f$ на проміжку $I$.

Будь-яку первісну функції $f$ на проміжку $I$ можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де $C$ — деяке число.

**Невизначений інтеграл**

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку $I$ називають її невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$.

**Правила знаходження первісної**

Якщо функції $F$ і $G$ є відповідно первісними функцій $f$ і $g$ на проміжку $I$, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.

Якщо функція $F$ є первісною функції $f$ на проміжку $I$ та $k$ — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.

**Площа криволінійної трапеції**

Площу $S$ криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де $F$ — будь-яка первісна функції $f$ на проміжку $[a; b]$.

**Визначений інтеграл**

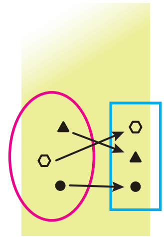
Нехай $F$ — первісна функції $f$ на проміжку $I$, числа $a$ і $b$, де $a < b$, належать проміжку $I$. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції $f$ на проміжку $[a; b]$ і позначають

$$\int_a^b f(x)dx.$$

**Формула Ньютона—Лейбніца**

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F$ — довільна первісна функції $f$ на проміжку $[a; b]$.

# §3 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з комбінаторними методами обчислення кількості різних множин, утворених за певними правилами; з класичним визначенням ймовірності випадкової події; почнете вивчати математичну статистику — науку про збирання даних та їх оброблення й аналіз.

## 12. Комбінаторні правила суми та добутку

Скількома способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількома способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Розділ математики, який вивчає способи розв'язування подібних задач, називають **комбінаторикою**.

Підґрунтям для розв'язування більшості комбінаторних задач є два правила: правило суми та правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів по Херсонщині та 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є $5 + 7 = 12$ різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

Отже, для обчислення загальної кількості маршрутів ми додали кількість маршрутів по Херсонщині та кількість маршрутів по Карпатах. Такий прийом називають комбінаторним **правилом суми**.

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути та хоче побувати спочатку на Херсонщині, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо вибрати один маршрут по Херсонщині, то парою до нього може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів по Херсонщині 5, то кількість пар (маршрут по Херсонщині; маршрут по Карпатах) дорівнює

$7+7+7+7+7$, тобто дорівнює добутку $7 \cdot 5 = 35$. Такий прийом називають комбінаторним **правилом добутку**.

Ці міркування ілюструє така таблиця.

| | | Карпатські маршрути | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Маршрути по Херсонщині | 1 | (1; 1) | (1; 2) | (1; 3) | (1; 4) | (1; 5) | (1; 6) | (1; 7) |
| | 2 | (2; 1) | (2; 2) | (2; 3) | (2; 4) | (2; 5) | (2; 6) | (2; 7) |
| | 3 | (3; 1) | (3; 2) | (3; 3) | (3; 4) | (3; 5) | (3; 6) | (3; 7) |
| | 4 | (4; 1) | (4; 2) | (4; 3) | (4; 4) | (4; 5) | (4; 6) | (4; 7) |
| | 5 | (5; 1) | (5; 2) | (5; 3) | (5; 4) | (5; 5) | (5; 6) | (5; 7) |

**Задача 1.** Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

*Розв'язання.* Першою цифрою в такому трицифровому числі може бути будь-яка з трьох цифр 1, 2 або 3. Маємо 3 варіанти.

Оскільки всі цифри в цьому трицифровому числі мають бути різними, то якою б не була перша цифра, другою цифрою числа може бути будь-яка з тих двох цифр, що залишилися. Отже, для кожного з трьох варіантів вибору першої цифри існує 2 варіанти для другої цифри. Використовуючи правило добутку, маємо, що перші дві цифри трицифрового числа можна вибрати $3 \cdot 2 = 6$ способами.

Оскільки всі цифри в трицифровому числі мають бути різними, то зрозуміло, що перші дві цифри числа однозначно визначають останню третю цифру. Тому із цифр 1, 2, 3 можна скласти $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ трицифрових чисел так, щоб у кожному числі всі цифри були різними.

*Відповідь*: 6. ◄

Під час розв'язування задачі 1 нам довелося обчислювати добуток $3 \cdot 2 \cdot 1$. У комбінаторних задачах добуток послідовних натуральних чисел від 1 до $n$ зустрічається настільки часто, що отримав спеціальну назву «**факторіал**» і позначення

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(запис «$n!$» читають «ен факторіал»).

Наприклад, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

**Задача 2.** Для захисту інформації на комп'ютері використовують пароль — послідовність латинських букв завдовжки від 3 до 5 символів (пароль може містити кілька однакових букв). Скільки різних паролів можна утворити, використовуючи 26 латинських букв?

*Розв'язання.* Розглянемо кількість різних паролів із трьох символів. Першим символом можна вибрати будь-яку букву. Отже, маємо 26 варіантів. Аналогічно для вибору другого та третього символів існує по 26 варіантів. Використовуючи правило добутку, маємо, що існує $26^3$ різних паролів із трьох символів.

Міркуючи аналогічно, можна встановити, що кількість паролів із чотирьох символів дорівнює $26^4$, а паролів із п'яти символів — $26^5$.

Таким чином, використовуючи правило суми, отримуємо, що загальна кількість паролів становить $26^3 + 26^4 + 26^5$.

*Відповідь*: $26^3 + 26^4 + 26^5$. ◄

**?**

1. Наведіть приклади задач, розв'язування яких вивчає комбінаторика.
2. Що називають факторіалом числа? Як його позначають?

## ВПРАВИ

**12.1.°** Із міста $A$ до міста $B$ проходять 4 шляхи, а з міста $B$ до міста $C$ проходять 3 шляхи (рис. 12.1). Скількома способами можна проїхати з міста $A$ до міста $C$?

**12.2.°** На вершину гори прокладено 5 маршрутів. Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на це запитання також за умови, коли підйом і спуск мають відбуватися за різними маршрутами.

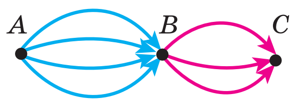



**Рис. 12.1**

**12.3.°** У кафе пропонують меню з 3 перших страв, 6 других страв і 5 третіх страв. Скільки є способів вибрати обід із трьох страв (по одній страві кожного виду)?

**12.4.°** Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

**12.5.°** Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**12.6.°** Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні?

**12.7.•** Розглядатимемо склади з двох букв, перша з яких позначає приголосний звук, а друга — голосний. Скільки таких різних складів можна скласти з букв слова:

1) шабля; 2) шаровари?

**12.8.**• У корзині лежать 10 яблук і 7 груш. Антон вибирає яблуко або грушу. Після цього Максим вибирає яблуко та грушу. У якому випадку Максим має більше можливостей для вибору: коли Антон узяв яблуко чи коли Антон узяв грушу?

**12.9.**• На рисунку 12.2 показано схему доріг, які ведуть з міста $A$ до міста $B$. Скількома способами можна проїхати з міста $A$ до міста $B$?

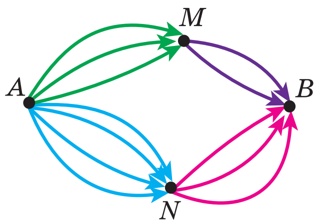



**Рис. 12.2**

**12.10.**• У кафе пропонують меню з 3 різних салатів, 6 різних м'ясних страв і 5 різних десертів. Скільки існує способів вибрати обід із двох страв різного виду?

**12.11.**• Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри в яких різні, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися:
1) із цифри 1; 2) із запису «34»?

**12.12.**• Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

**12.13.**• Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

**12.14.**• Скільки існує семицифрових телефонних номерів, які не починаються із цифри 0?

**12.15.**• Монету кидають 4 рази. Скільки різних послідовностей гербів і цифр можна отримати?

**12.16.**• Гральний кубик кидають 3 рази. Скільки різних послідовностей очок можна отримати?

**12.17.**• Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**12.18.**• Скільки трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**12.19.**• Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких мають бути різними, можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4?

**12.20.**• Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному числі цифри були різними?

**12.21.**•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5?

**12.22.**•• Скільки існує семицифрових чисел, які діляться націло на 25?

**12.23.*** У книжковому магазині є 4 різних видання поеми «Енеїда», 3 різних видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різних видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» та п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» та «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного із цих творів?

**12.24.*** Скільки існує семицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**12.25.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2,1x+1} = x-1;$
2) $2x+\sqrt{3x-2} = 3;$
3) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8} = 6;$
4) $2\sqrt{x-2} = \sqrt[4]{x-2}+15;$
5) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1} = 2;$
6) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x} = 5.$

**12.26.** Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$x^2+3\left(\sqrt{3-x}\right)^2-13 \leqslant 0.$$

# 13. Перестановки. Розміщення. Комбінації

Зоя, Оля та Ян зайшли до шкільного буфету. Скількома способами вони можуть вишикуватися в чергу? Зрозуміло, що існує 6 варіантів.

| | | |
|---|---|---|
| Зоя, Оля, Ян | Оля, Ян, Зоя | Ян, Зоя, Оля |
| Зоя, Ян, Оля | Оля, Зоя, Ян | Ян, Оля, Зоя |

Ще один приклад.

Денний розклад містить 7 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 7 уроків були різними? Іншими словами, скільки існує перестановок із 7 уроків?

Подібні задачі називають задачами на знаходження кількості **перестановок**. Кількість перестановок із $n$ елементів позначають символом $P_n$. Для будь-якого натурального $n$ справедлива формула

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n!}} \qquad (1)$$

Отже, троє дітей можуть вишикуватися в чергу $3! = 6$ способами, а кількість розкладів із 7 уроків дорівнює $7! = 5040$.

**Задача 1.** Скількома способами 5 машин можуть вишикуватися в колону?

*Розв'язання.* У даній задачі треба обчислити кількість перестановок із 5 елементів. Використовуючи формулу (1), маємо: $P_5 = 5! = 120$.

*Відповідь*: 120. ◄

Розглянемо ще кілька типових комбінаторних задач.

**Задача 2.** За правилами *FIFA*[1] у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами?

*Розв'язання.* Перше місце може посісти будь-яка з 32 команд, друге місце — будь-яка з решти 31 команди, третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

*Відповідь*: 29 760. ◄

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує способів розмістити на призовому п'єдесталі 3 команди, вибравши їх із 32 учасників. Говорять, що ми знайшли кількість **розміщень** із 32 елементів по 3 елементи.

Кількість усіх можливих розміщень із $n$ елементів по $k$ елементів позначають символом $A_n^k$, використовуючи першу літеру французького слова *arrangement* — розміщення.

Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дає змогу зробити висновок, що $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Узагалі, при будь-яких натуральних $n$ і $k$ таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (2)$$

За означенням прийнято вважати, що $0! = 1$. Ця домовленість дає змогу записати формулу (2) більш компактно:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Розглянемо такі дві задачі. Скількома способами в класі, у якому 30 учнів та учениць, можна вибрати старосту та його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?

[1] Міжнародна федерація футбольних асоціацій.

Відповідь на перше запитання вам відома: це $A_{30}^2$. Щоб відповісти на друге запитання, потрібно встановити кількість способів сформувати із 30 елементів 2-елементну множину. У такому випадку говорять, що треба знайти кількість **комбінацій** із 30 елементів по 2 елементи.

Кількість усіх можливих комбінацій із $n$ елементів по $k$ елементів позначають символом $C_n^k$, використовуючи першу літеру французького слова *combinaison* — комбінація.

Отже, задачу про кількість способів призначення чергових можна сформулювати так: чому дорівнює $C_{30}^2$?

Можна довести, що має місце формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \qquad (3)$$

**Задача 3.** На колі позначено 8 точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

*Розв'язання.* Шукана кількість трикутників дорівнює кількості комбінацій із 8 елементів по 3 елементи. Використовуючи формулу (3), отримуємо:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

*Відповідь*: 56 трикутників. ◄

1. За якою формулою можна обчислити кількість перестановок із $n$ елементів?
2. За якою формулою можна обчислити кількість розміщень із $n$ елементів по $k$ елементів?
3. За якою формулою можна обчислити кількість комбінацій із $n$ елементів по $k$ елементів?

## ВПРАВИ

**13.1.**° Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

**13.2.**° У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

**13.3.°** Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 осіб, якщо кожна з них може водити автомобіль?

**13.4.°** У футбольній команді, яка складається з 11 гравців, потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами можна це зробити?

**13.5.°** Комісія, що складається з 15 осіб, має вибрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами можна це зробити?

**13.6.°** У 9 класі вивчають 12 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

**13.7.°** У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті, срібні та бронзові нагороди?

**13.8.°** У класі навчаються 32 учні та учениці. Кожні двоє з них обмінялись одне з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?

**13.9.°** У класі з поглибленим вивченням математики 29 учнів та учениць. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?

**13.10.°** Дано правильний $n$-кутник. Скільки існує чотирикутників із вершинами, які містяться серед вершин даного $n$-кутника?

**13.11.°** На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

**13.12.•** Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися, а крайні цифри були парними?

**13.13.•** Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

**13.14.•** Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він вибере рівно 3 виграшних білети?

**13.15.••** На прямій позначено 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

**13.16.••** Пряма та коло не мають спільних точок. На колі позначено 9 червоних точок, а на прямій — 15 синіх точок. Відомо, що жодна пряма, яка проходить через дві червоні точки, не містить синіх точок. Скільки існує трикутників із вершинами в цих точках?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**13.17.** Брюки дорожчі за сорочку на 30 % і дешевші від піджака на 22 %. На скільки відсотків сорочка дешевша від піджака?

**13.18.** Обчисліть значення виразу:

1) $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$;

2) $\log_6 144 - \log_6 4$;

3) $\dfrac{18}{5^{\log_5 2}}$;

4) $\log_2 7 \cdot \log_7 4$.

# 14. Класичне визначення ймовірності випадкової події

Для того щоб знайти ймовірність деяких подій, не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

**Задача 1.** Нехай у коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

*Розв'язання.* Зрозуміло, що в цьому випробуванні є 15 *рівноможливих результатів*. З них є 5, які нас задовольняють: коли витягують кулі з номерами 3, 6, 9, 12, 15. Через це природно вважати, що ймовірність події «витягнули кулю з номером, кратним 3» дорівнює $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

*Відповідь*: $\dfrac{1}{3}$. ◄

Розв'язання багатьох ймовірнісних задач можна описати такою схемою.

- Нехай під час випробування можна отримати один із $n$ рівноможливих результатів.
- Розглядається деяка подія $A$, яку спричиняють $m$ результатів. Називатимемо їх ***сприятливими***.
- Ймовірність $P(A)$ події $A$ можна обчислити за формулою

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}}$$

Таку схему називають **класичним визначенням ймовірності** випадкової події.

**Задача 2.** Переможцями шкільного етапу конкурсу талантів стали Марина, Світлана, Андрій та Дмитро. На районний конкурс талантів треба відправити двох учнів із числа переможців. Було прийнято рішення відібрати команду шляхом жеребкування. Яка ймовірність того, що на районному конкурсі школу представлятимуть хлопчик і дівчинка?

*Розв'язання.* Під час жеребкування треба вибрати одну пару, яка поїде на конкурс, із таких 6 рівноможливих результатів:

1) Марина та Світлана; 4) Світлана та Андрій;
2) Марина та Андрій; 5) Світлана та Дмитро;
3) Марина та Дмитро; 6) Андрій та Дмитро.

Серед цих пар існує 4 таких пари, що складаються з хлопчика та дівчинки. Отже, ймовірність події «школу представлятимуть хлопчик і дівчинка» дорівнює $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

*Відповідь*: $\frac{2}{3}$. ◄

Розглянемо ще один приклад.

Нехай у коробці лежать 9 зелених куль. Яка ймовірність того, що взята навмання куля буде зеленого кольору? жовтого кольору?

За даних умов будь-яка взята навмання куля буде зеленого кольору.

Подію, яка за даним комплексом умов обов'язково відбудеться в будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною)**.

Ймовірність такої події вважають рівною 1. Інакше кажучи, якщо $A$ — достовірна подія, то $P(A) = 1$.

Отже, ймовірність того, що взята навмання куля буде зеленого кольору, дорівнює 1.

Оскільки в коробці немає куль жовтого кольору, то взяти навмання кулю жовтого кольору неможливо.

Подію, яка за даним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**.

Ймовірність такої події вважають рівною 0. Інакше кажучи, якщо $A$ — неможлива подія, то $P(A) = 0$.

Щоб обчислити ймовірність випадкової події, нам доводилося підраховувати кількість рівноможливих результатів у заданому експерименті та кількість сприятливих результатів.

Часто ці підрахунки пов'язані з визначенням кількості різних комбінацій, які за певним правилом можна скласти з елементів заданої скінченної множини, тому застосування правил комбінаторики — ефективний прийом для розв'язування багатьох задач з теорії ймовірностей.

**Задача 3.** На торговельному лотку лежать 28 яблук — 15 жовтих і 13 червоних. Покупець придбав 3 яблука, які продавець вибрав навмання. Яка ймовірність того, що всі придбані яблука жовті?

*Розв'язання.* Із 28 яблук продавець може вибрати 3 яблука $C_{28}^3$ способами. Обчислимо, скільки серед цих способів таких, коли всі три яблука жовті. Із 15 жовтих яблук продавець може вибрати 3 яблука $C_{15}^3$ способами.

Отже, ймовірність випадкової події $A$ — вибрати три жовтих яблука — дорівнює $P(A) = \frac{C_{15}^3}{C_{28}^3}$.

Скориставшись формулою $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, можна підрахувати, що $P(A) = \frac{5}{36}$.

*Відповідь:* $\frac{5}{36}$. ◄

?

Яку формулу використовують для класичного визначення ймовірності випадкової події?

## ВПРАВИ

**14.1.°** Ймовірність купити бракований електроприлад дорівнює 0,007. Чи правильно, що в будь-якій партії із 1000 електроприладів є 7 бракованих?

**14.2.°** Ймовірність улучити в мішень становить 75 %. Чи може бути так, що в серії зі 100 пострілів буде 98 улучень у мішень?

**14.3.°** У шухляді лежать 8 синіх і 12 червоних олівців. Яка ймовірність взяти навмання з шухляди:

1) ручку; 2) олівець?

**14.4.°** Із цифр 2, 4, 6, 8 утворюють трицифрове число. Яка ймовірність того, що це число буде ділитися націло:

1) на 5; 2) на 2?

**14.5.°** Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «математика», отримаємо слово «література»?

**14.6.°** З множини {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число:

1) дорівнює 2;
2) дорівнює 5;
3) є непарним;
4) кратне 4;
5) не ділиться націло на 3;
6) кратне 11?

**14.7.°** Яка ймовірність того, що, викликаючи учня до дошки у вашому класі, учитель викличе хлопчика?

**14.8.°** Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число кратне числу 11?

**14.9.•** У коробці було 17 карток, пронумерованих числами від 1 до 17. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

1) 12;
2) парне;
3) кратне 3;
4) не кратне 5;
5) двоцифрове;
6) просте?

**14.10.•** На 15 картках записано натуральні числа від 1 до 15. Яка ймовірність того, що число, записане на навмання вибраній картці:

1) непарне;
2) складене;
3) не ділиться націло ні на 2, ні на 3?

**14.11.•** У коробці лежать $a$ синіх, $b$ жовтих і $c$ червоних кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться:

1) жовтою;
2) синьою;
3) не червоною?

**14.12.•** У мішку Діда Мороза лежать $n$ плюшевих ведмедиків, $m$ цукерок і $k$ мандаринів. Яка ймовірність того, що вибраний навмання подарунок виявиться:

1) ведмедиком;
2) їстівним;
3) не цукеркою?

**14.13.••** На полиці лежать 12 зошитів, з яких 5 у клітинку. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 зошити будуть у клітинку?

**14.14.••** У колекції Андрія є 40 монет різних країн, серед яких 6 українських. Андрій узяв навмання 3 монети. Яка ймовірність того, що всі ці монети будуть українськими?

**14.15.••** У ящику лежать 12 жовтих і 15 синіх куль. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання восьми куль п'ять будуть жовтого кольору?

**14.16.••** Для лотереї підготували 1000 білетів, з яких 15 є виграшними. Яка ймовірність того, що з трьох навмання вибраних білетів усі виявляться виграшними?

**14.17.••** У шухляді лежать олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 штук менше, ніж ручок. Скільки олівців лежить у шухляді, якщо ймовірність того, що вибраний навмання предмет:

1) є ручкою, дорівнює $\frac{5}{8}$; 2) є олівцем, дорівнює $\frac{1}{6}$?

**14.18.••** Подарунковий комплект містить 12 зелених і кілька червоних надувних куль. Скільки червоних куль у комплекті, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля:

1) виявиться зеленою, дорівнює $\frac{3}{7}$;

2) виявиться червоною, дорівнює $\frac{2}{5}$?

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**14.19.** Один турист долає шлях від пункту $A$ до пункту $B$ за 3 год, а другий турист із пункту $B$ до пункту $A$ — за 6 год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо вийдуть одночасно назустріч один одному з пунктів $A$ і $B$?

**14.20.** Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(2{,}6 \cdot 10^3) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-8})$; 2) $\frac{3{,}6 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-4}}$.

# 15. Елементи математичної статистики

Яким тиражем потрібно випустити підручник з математики для 11 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

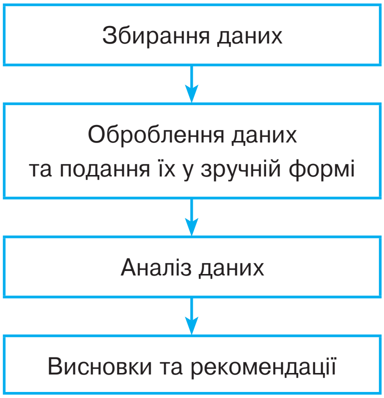
Скільки кілограмів риби і морепродуктів уживає в середньому за рік один житель України?

Чи вигідно для концерту даного артиста орендувати стадіон?

На ці та багато інших запитань допомагає відповідати статистика.

**Означення. Статистика** (від латин. *status* — стан) **— це наука про отримання, оброблення й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.**

Статистичне дослідження складається з кількох етапів:




Зупинимося окремо на кожному етапі.

**Збирання даних**

Ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, дослідивши, звісно, не всіх людей планети.

Зрозуміло, що дослідження носило *вибірковий*, але *масовий* характер.

У статистиці сукупність об'єктів, ґрунтуючись на яких проводять дослідження, називають **вибіркою**.

У даному прикладі вибірка складалася з кількох мільйонів людей.

Потрібно зазначити, що статистичний висновок, заснований лише на чисельності вибірки, не завжди є достовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, обмежимося опитуванням людей, які прийшли на його концерт, то отримані висновки не будуть об'єктивними, адже вони прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається. Статистики кажуть, що вибірка має бути **репрезентативною** (від фр. *représentatif* — показовий).

Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику виникнення серцево-судинних захворювань, досліджували людей різного віку, професій, національностей тощо.

Отже, *збирання даних має ґрунтуватися на масовості та репрезентативності вибірки*. Іноді вибірка може збігатися з множиною всіх об'єктів, щодо яких проводиться дослідження. Прикладом такого дослідження є проведення зовнішнього незалежного оцінювання з української мови.

**Способи подання даних**

Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм.

Розглянемо кілька прикладів.

**Приклад 1.** «Євробачення» — міжнародний конкурс естрадної пісні. У таблиці подано результати виступів українських виконавців на конкурсі «Євробачення» протягом 2003–2018 рр.

| Рік | Виконавець | Місце | Загальна кількість набраних балів |
|---|---|---|---|
| 2003 | Олександр Пономарьов | 14 | 30 |
| 2004 | Руслана | 1 | 280 |
| 2005 | «Гринджоли» | 19 | 30 |
| 2006 | Тіна Кароль | 7 | 145 |
| 2007 | Вєрка Сердючка | 2 | 235 |
| 2008 | Ані Лорак | 2 | 230 |
| 2009 | Світлана Лобода | 12 | 76 |
| 2010 | Альоша | 10 | 108 |
| 2011 | Міка Ньютон | 4 | 159 |
| 2012 | Гайтана | 15 | 65 |
| 2013 | Злата Огнєвіч | 3 | 214 |
| 2014 | Марія Яремчук | 6 | 113 |
| 2015 | *не брали участі* | | |
| 2016 | Джамала | 1 | 534 |
| 2017 | *O.Torvald* | 24 | 36 |
| 2018 | *Melovin* | 17 | 130 |

**Приклад 2.** На рисунку 15.1 подано узагальнені дані про щільність деревини (відношення маси деревини до її об'єму) для деяких порід дерев.

**Приклад 3.** На рисунку 15.2 зображено графік зміни кількості абонентів дротового телефонного зв'язку у світі протягом 1997–2016 рр.

**Приклад 4.** На круговій діаграмі (рис. 15.3) наведено розподіл населення світу за його частинами.

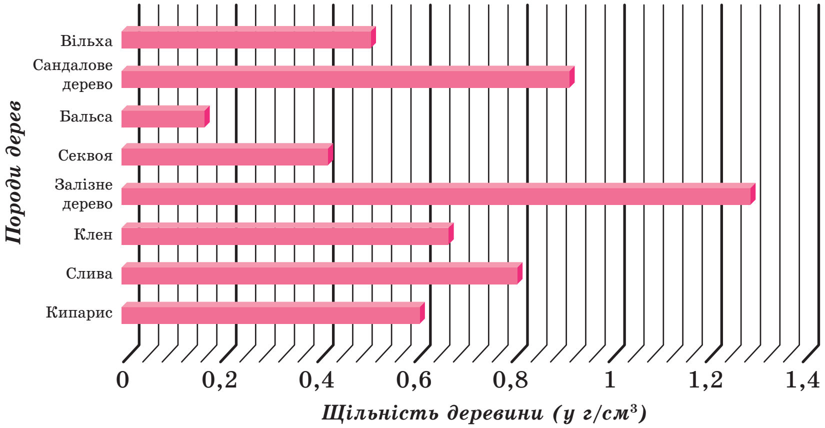



**Рис. 15.1**

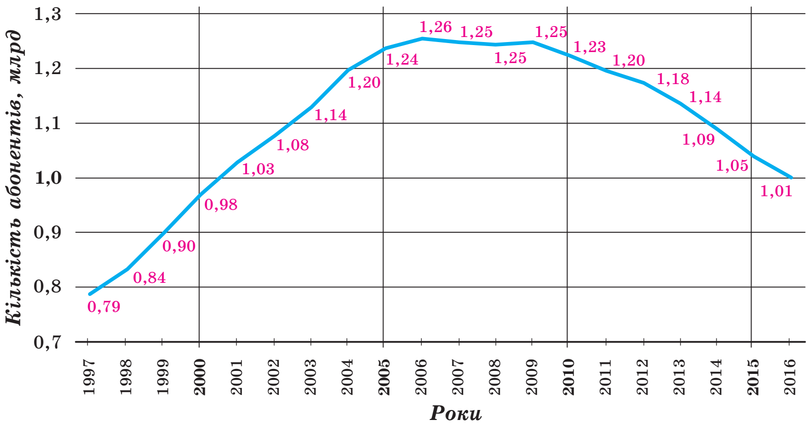



**Рис. 15.2**

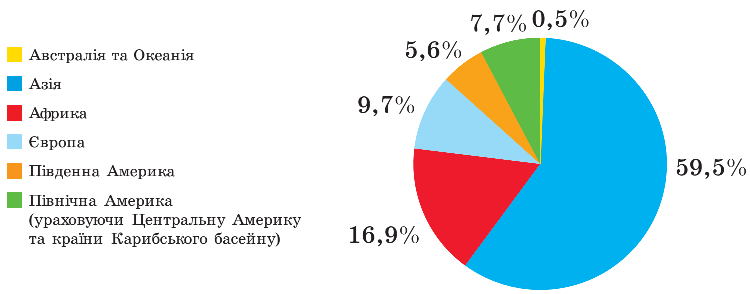



**Рис. 15.3**

Множину всіх можливих результатів певного випробування в статистиці прийнято називати **генеральною сукупністю.** Співвідношення між генеральною сукупністю і вибіркою проілюстровано на рисунку 15.4.

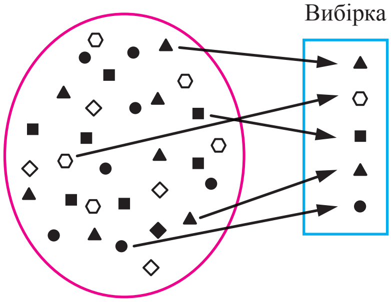



**Рис. 15.4**

Одна з головних задач статистики полягає в тому, щоб на основі аналізу даних вибірки зробити висновок про всю генеральну сукупність. Аналізуючи зібрані дані, виділяють один або кілька загальних показників, які характеризують найважливіші особливості генеральної сукупності. Наприклад, якщо вибірка складається із числових даних, то різницю між найбільшим і найменшим значеннями даних вибірки називають **розмахом** вибірки. Важливими показниками вибірки також є **середнє значення, медіана** та **мода.**

Нехай вибірка складається із числових даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**Середнім значенням** цієї вибірки називають число

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Наприклад, у таблиці подано результати виступів українських школярів на міжнародних математичних олімпіадах протягом 2009–2018 рр. (команда учасників на міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб).

| Рік | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість медалей | 6 | 6 | 6 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 6 |

Для даної вибірки **середнє значення** дорівнює:

$$\overline{x} = \frac{6+6+6+5+5+6+6+6+5+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Оскільки за рік можна вибороти не більше 6 медалей, то середнє значення 5,7 свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

Звернемо увагу на те, що середнє значення вибірки визначають лише у випадку, коли зібраними даними є числа.

Розглянемо вибірку, що складається з таких даних, які можна порівнювати одне з одним. Якщо кількість даних непарна і їх записано в порядку зростання, то **медіаною** даної вибірки називають те з даних, яке розміщене посередині переліку.

Наприклад, у багатьох університетах України запроваджено оцінювання знань студентів не за числовою шкалою, а за шкалою букв: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ ($A$ — найвища, $F$ — найнижча оцінка). Нехай під час опитування 9 студентів про результати складання ними останнього іспиту було отримано таку вибірку (послідовність оцінок):

$$F,\ F,\ D,\ D,\ \mathbf{C},\ C,\ C,\ B,\ A$$

Бачимо, що посередині переліку розміщена буква $C$. Отже, медіаною даної вибірки є оцінка $C$.

Якщо вибірка складається з парної кількості даних, наприклад:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6,$$

то медіаною даної вибірки називають будь-яке з даних $x_3$ або $x_4$, тобто будь-яке з тих двох даних, що розташовані посередині даного переліку.

Наприклад, якщо до 9 наведених вище оцінок студентів додати ще одну оцінку $E$, то отримаємо таку послідовність:

$$F,\ F,\ E,\ D,\ \mathbf{D},\ \mathbf{C},\ C,\ C,\ B,\ A.$$

Бачимо, що посередині переліку розташовані літери $D$ і $C$. Отже, медіаною даної вибірки є оцінки $D$ і $C$.

Зверніть увагу на те, що в наведених прикладах знаходження медіани вибірки досліджувані дані не є числами.

Якщо досліджуваними даними є числа, то у випадку парної кількості даних медіаною вибірки допускається також вважати середнє арифметичне двох чисел, що розташовані посередині даного упорядкованого переліку. Наприклад, якщо розглянути вибірку із чотирьох числових даних:

$$1,\ 2,\ 3,\ 7,$$

то число $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ можна вважати медіаною цієї вибірки.

Розглянемо ще одну вибіркову характеристику. **Модою** даної вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку найчастіше. Якщо таких даних кілька, то кожне з них є модою даної вибірки. Наприклад, якщо вибірка складається із шести чисел: 1, 2, 2, 3, 3, 3, то число 3 є модою даної вибірки.

У таблиці наведено кількість медалей кожного виду, що їх вибороли українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах протягом 1993–2018 рр.

| Золоті медалі | Срібні медалі | Бронзові медалі | Без медалей |
|---|---|---|---|
| 38 | 59 | 44 | 15 |

Число 59 показує, що українські школярі найчастіше завойовували срібні медалі. Показник «срібні медалі» є модою наведених даних.

1. Що називають розмахом вибірки?
2. Що називають середнім значенням вибірки?
3. Поясніть, що називають медіаною вибірки.
4. Що називають модою вибірки?

## ВПРАВИ

**15.1.°** Запишіть прізвища учнів, яких опитав учитель на минулому уроці математики під час перевірки домашнього завдання. Що є генеральною сукупністю та вибіркою зі статистичного дослідження щодо перевірки результатів виконання домашнього завдання?

**15.2.°** Результатом роботи комп'ютерної програми, що моделює статистичне дослідження, є деяке ціле число в діапазоні від −128 до 128. Після п'яти послідовних запусків програма видала такі результати: 62, −15, 31, 103, −22. Що в даному статистичному дослідженні є генеральною сукупністю? Що є вибіркою? Знайдіть розмах вибірки.

**15.3.°** Учнів опитали про їхній улюблений предмет у школі. Які статистичні показники (розмах, середнє значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

**15.4.°** На замовлення підприємств легкої промисловості проведено дослідження, результатами якого є розміри одягу в міжнародному форматі (символи: XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Які статистичні показники (розмах, середнє значення, медіана, мода) можна визначити для зібраних даних?

**15.5.°** Дано вибірку: 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 12. Знайдіть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

**15.6.°** Дано вибірку: 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9. Знайдіть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

**15.7.°** Серед учнів і учениць 11 класу провели опитування: скільки часу вони щодня перебувають на свіжому повітрі. Результати опитування подано у вигляді діаграми, зображеної на рисунку 15.5. Знайдіть розмах, середнє значення та моду даної вибірки.

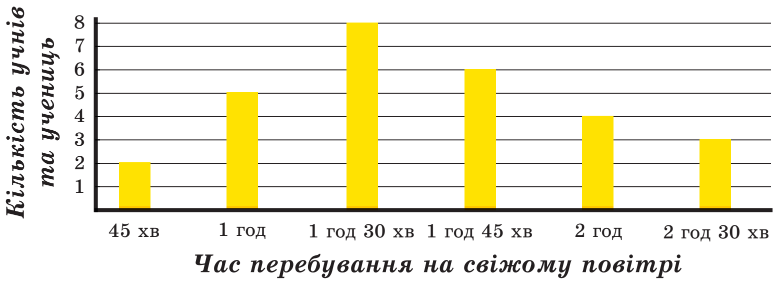



**Рис. 15.5**

**15.8.•** Визначте середнє значення та медіану вибірки 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6.

**15.9.•** Користуючись таблицею середніх температур повітря в січні в деяких містах світу, обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

| Місто | Температура, °C | Місто | Температура, °C |
|---|---|---|---|
| Амстердам | 3 | Москва | –10 |
| Афіни | 8 | Найробі | 27 |
| Буенос-Айрес | 23 | Нью-Йорк | 0 |
| Гонконг | 24 | Ріо-де-Жанейро | 30 |
| Єрусалим | 8 | Рим | 8 |
| Київ | –6 | Сінгапур | 27 |
| Монреаль | –11 | Токіо | 3 |

**15.10.**$^{\bullet}$ Користуючись таблицею врожайності насіння соняшнику в Україні, обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

| Рік | Урожайність, ц/га | Рік | Урожайність, ц/га |
|---|---|---|---|
| 2006 | 14 | 2012 | 17 |
| 2007 | 12 | 2013 | 22 |
| 2008 | 15 | 2014 | 19 |
| 2009 | 15 | 2015 | 22 |
| 2010 | 15 | 2016 | 22 |
| 2011 | 18 | 2017 | 20 |

**15.11.**$^{\bullet}$ У чемпіонаті України з футболу 2017–2018 рр. команда «Шахтар», що стала чемпіоном України, зіграла 32 матчі, у яких двічі забила 5 голів, 3 рази — 4 голи, 9 разів — 3 голи, 8 разів — 2 голи, 6 разів — один гол і в 4 матчах не забила жодного гола. Обчисліть середню кількість м'ячів, яку команда «Шахтар» забивала в одному матчі.

**15.12.**$^{\bullet}$ Студентка протягом семестру отримала 45 оцінок, серед яких 7 п'ятірок, 22 четвірки та 16 трійок. Обчисліть середній бал студентки.

**15.13.**$^{\bullet\bullet}$ На зовнішньому незалежному оцінюванні школярів з математики 2018 року було запропоновано тестове завдання:

«Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

| А | Б | В |
|---|---|---|
| $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ | $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ | $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ |

| Г | Д |
|---|---|
| $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ |

»

На діаграмі (рис. 15.6) наведено дані про кількість учнів, які розв'язували це завдання. Знайдіть моду відповідей учнів. За правильну відповідь нараховувався 1 бал, а за неправильну відповідь — 0 балів. Обчисліть середнє значення та медіану кількості балів, яку набрали учасники тестування за це завдання.

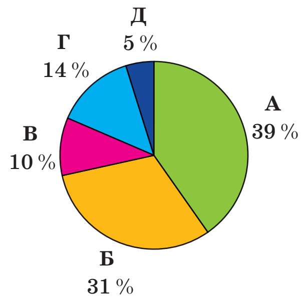



**Рис. 15.6**

**15.14.**•• Телефонна компанія хоче дізнатися про кількість телефонних дзвінків, які робить людина протягом доби. Дані щодо 100 людей подано на діаграмі (рис. 15.7). Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду цієї вибірки.

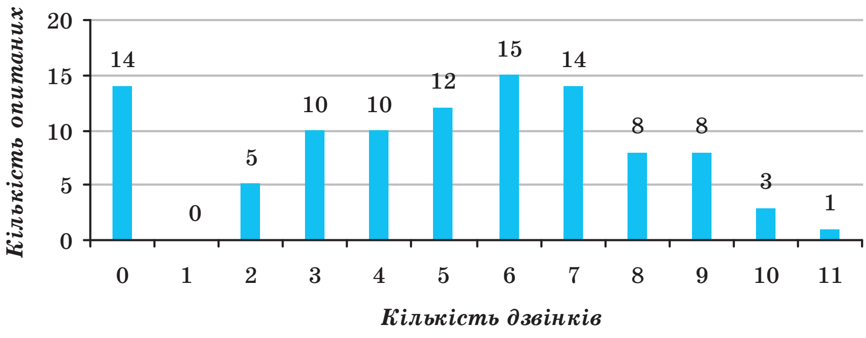



**Рис. 15.7**

**15.15.**•• На діаграмі на рисунку 15.8 наведено дані про кількість книжок, що їх прочитали протягом місяця 50 опитаних школярів. Обчисліть розмах, середнє значення, медіану та моду даної вибірки.

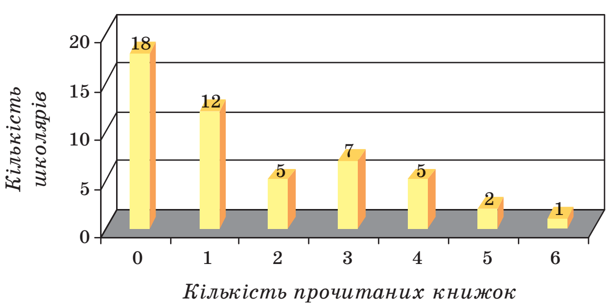



**Рис. 15.8**

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**15.16.** Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{\left(8-\sqrt{7}\right)^6}+\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$;

2) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-6\right)^8}+\sqrt[7]{\left(\sqrt{5}-3\right)^7}$.

**15.17.** Чому дорівнює значення виразу:

1) $\log_{27}\log_8\sqrt[5]{32}$;

2) $36^{\frac{1}{3}\log_6 64-3\log_6 2}$;

3) $\dfrac{25^{-\frac{2}{5}}\cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{\sqrt[5]{9}}$?

**15.18.** Знайдіть значення виразу $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$, якщо $\cos\alpha=-0{,}8$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

## ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Скільки шестицифрових чисел, які кратні числу 10 і всі цифри яких різні, можна записати, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, 5?

А) 36; Б) 60; В) 24; Г) 120.

**2.** Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

А) 288; Б) 405; В) 360; Г) 720.

**3.** У секції легкої атлетики займаються 30 хлопців і 10 дівчат. Скількома способами можна скласти команду із 7 осіб так, щоб до неї входило п'ять хлопців і дві дівчини?

А) $C_{30}^{5} \cdot C_{10}^{2}$; В) $C_{30}^{10} \cdot C_{5}^{2}$;

Б) $C_{30}^{5} + C_{10}^{2}$; Г) $C_{30}^{10} + C_{5}^{2}$.

**4.** Є 6 різних квіток. Скільки існує способів скласти з них букет із 3 квіток або з 5 квіток?

А) $C_{6}^{3} \cdot C_{6}^{5}$; В) $A_{6}^{3} \cdot A_{6}^{5}$;

Б) $C_{6}^{3} + C_{6}^{5}$; Г) $A_{6}^{3} + A_{6}^{5}$.

**5.** У коробці лежать 15 куль: 10 синіх та 5 зелених. Яка ймовірність того, що навмання взята з коробки куля виявиться жовтою?

А) 1; Б) 0,5; В) 0; Г) $-1$.

**6.** У коробці лежать 10 білих і 5 червоних куль. Яку найменшу кількість куль треба вийняти навмання з коробки, щоб ймовірність того, що серед них обов'язково будуть 2 білі кулі, дорівнювала 1?

А) 5 куль; Б) 6 куль; В) 7 куль; Г) 10 куль.

**7.** Нехай ймовірність події $A$ дорівнює $P(A)$. У якому випадку подію $A$ називають достовірною?

А) $P(A) = 0$; В) $P(A) > 0,99$;

Б) $P(A) > 0$; Г) $P(A) = 1$.

**8.** Ймовірність купити браковану пару чобіт деякої відомої фірми складає 0,023. Скільки бракованих пар взуття гарантовано містить партія з 1000 пар чобіт цієї фірми?

А) Менше 23; В) рівно 23;

Б) більше 23; Г) відповідь дати неможливо.

**9.** Набираючи номер телефону, абонент забув другу цифру номера. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

А) 0,01; Б) 0,1; В) 0,5; Г) 1.

**10.** У класі навчаються 18 дівчат і 12 хлопців. Навмання вибирають одну особу для участі в шкільних зборах. Яка ймовірність того, що буде вибрано хлопця?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{1}{2}$; В) $\frac{3}{5}$; Г) $\frac{2}{5}$.

**11.** На 20 картках записано натуральні числа від 1 до 20. Яка ймовірність того, що число, записане на навмання вибраній картці, не ділиться націло ні на 4, ні на 5?

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{1}{5}$; В) $\frac{11}{20}$; Г) $\frac{3}{5}$.

**12.** На 5 картках записано натуральні числа від 1 до 5. Яка ймовірність того, що добуток чисел, записаних на двох навмання взятих картках, дорівнюватиме непарному числу?

А) 0,2; Б) 0,3; В) 0,5; Г) 0,25.

**13.** Чому дорівнює медіана сукупності даних 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

А) 5; Б) 4; В) 3; Г) 2.

**14.** Чому дорівнює медіана вибірки 10, 16, 11, 12, 14, 15, 14, 15, 12, 14, 10?

А) 13; Б) 14; В) 12; Г) 12,5.

**15.** За даними Всеукраїнського перепису населення 2001 року віковий склад населення характеризувався такими даними:

| Вік | Кількість постійного населення, тис. осіб |
|---|---|
| 0–9 | 4533,3 |
| 10–19 | 7308,1 |
| 20–29 | 6891,6 |
| 30–39 | 6621,2 |
| 40–49 | 7298,7 |
| 50–59 | 5245,3 |
| 60–69 | 5522,2 |
| 70–79 | 3740,0 |
| 80 і старші | 1060,8 |

Яка вікова група визначала моду вікового складу населення України у 2001 році?

А) 0–9; Б) 10–19; В) 40–49; Г) 80 і старші.

**16.** За результатами тестування з математики 25 учнів одинадцятого класу склали таблицю розподілу кількості помилок, яких припустився один учень:

| Кількість помилок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість учнів | 5 | 4 | 6 | 8 | 2 |

Знайдіть середнє значення вибірки.

А) 2,5; Б) 1,88; В) 2; Г) 1,92.

**17.** За умовою задачі 16 укажіть моду даної вибірки.

А) 0; Б) 8; В) 3; Г) 4.

**18.** При підкиданні монети 20 разів поспіль випав герб. Яка ймовірність того, що при наступному підкиданні знову випаде герб?

А) 0,5; Б) $\frac{1}{21}$; В) $\frac{1}{2^{21}}$; Г) 0.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

**Перестановки**

Кількість перестановок із $n$ елементів позначають символом $P_n$.

Для будь-якого натурального $n$ справедлива формула $P_n = n!$.

**Розміщення**

Кількість усіх можливих розміщень із $n$ елементів по $k$ елементів позначають символом $A_n^k$.

При будь-яких натуральних $n$ і $k$ таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

**Комбінації**

Кількість усіх можливих комбінацій із $n$ елементів по $k$ елементів позначають символом $C_n^k$.

При будь-яких натуральних $n$ і $k$ таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

**Класичне визначення ймовірності випадкової події**

Ймовірність $P$ події $A$ можна обчислити за формулою $P(A) = \dfrac{m}{n}$, де $n$ — кількість рівноможливих результатів, які можна отримати під час випробування, $m$ — кількість сприятливих результатів, які спричиняють подію $A$.

**Елементи математичної статистики**

Розмахом вибірки, яка складається із числових даних, називають різницю між найбільшим і найменшим значеннями даних вибірки.

Середнім значенням вибірки, яка складається із числових даних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, називають число $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Медіаною вибірки, що складається з непарної кількості даних, називають те з даних, яке розміщене посередині переліку, коли дані записано в порядку зростання.

Медіаною вибірки, що складається з парної кількості даних, вважають будь-яке з двох даних, що розташовані посередині переліку, коли дані записано в порядку зростання, або їх середнє арифметичне (якщо досліджуваними даними є числа).

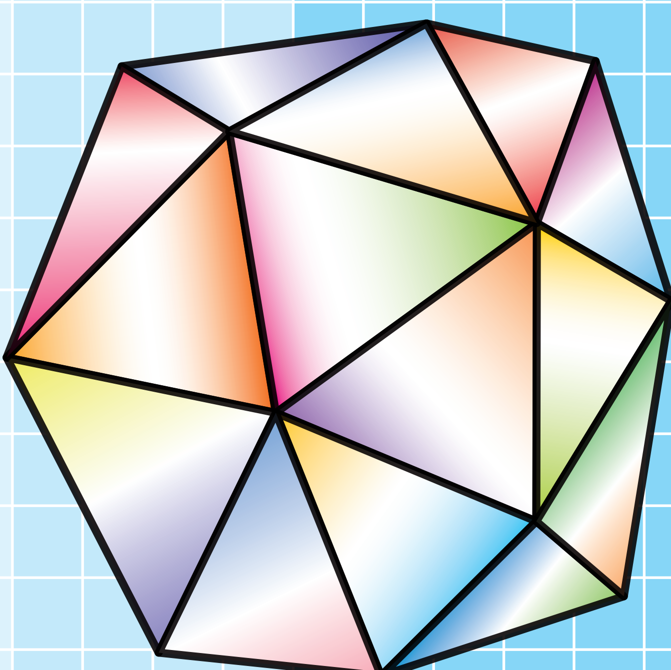
Модою вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку найчастіше.

# Розділ 2
# Геометрія

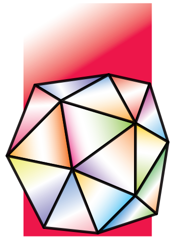
§ 4. Многогранники

§ 5. Тіла обертання

§ 6. Об'єми тіл. Площа сфери



# §4 МНОГОГРАННИКИ



У цьому параграфі ви уточните й розширите свої знання про многогранники. Отримаєте нові відомості про призму, піраміду та їхні окремі види.

## 16. Призма

На рисунку 16.1 зображено відомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

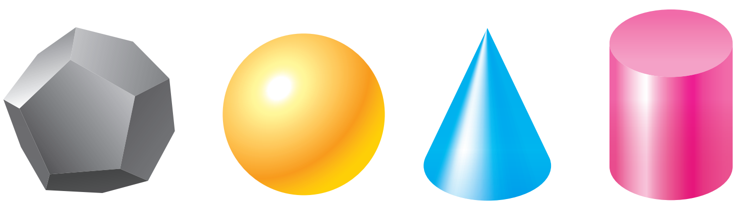


**Рис. 16.1**

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

**Означення. Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.**

З такими елементами многогранника, як грані, ребра та вершини, ви вже знайомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо у них є спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і $A_1B_1BA$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2) є сусідніми, оскільки ребро $A_1B_1$ у них спільне.

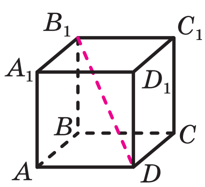



**Рис. 16.2**

Нехай точка $M$ — вершина многогранника. Кут з вершиною $M$ грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** $M$. Наприклад, на рисунку 16.2 кут $DAB$ є плоским кутом куба при вершині $A$.

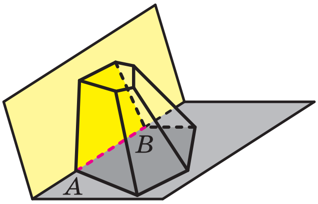



**Рис. 16.3**

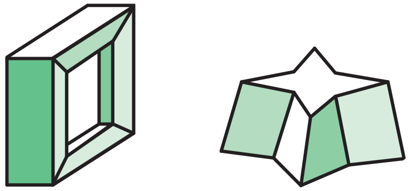


**Рис. 16.4**

**Двогранним кутом многогранника при ребрі** $AB$ називають двогранний кут з ребром $AB$, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро $AB$ є спільним (рис. 16.3).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок $DB_1$ — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 16.2).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

**Означення. Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.**

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 16.4 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками.

**Площею поверхні многогранника** називають суму площ усіх його граней.

Зупинимося докладніше на вже відомому вам виді многогранника — призмі.

**Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні $n$-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта $n$ граней — паралелограми, називають $n$-кутною призмою.**

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні $n$-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 16.5).

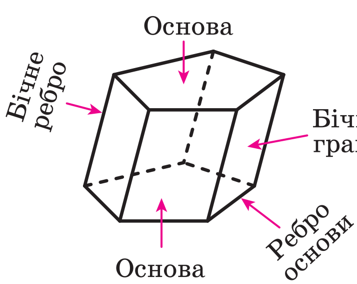



**Рис. 16.5**

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

**Висотою призми** називають перпендикуляр, опущений з якоїнебудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 16.6). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

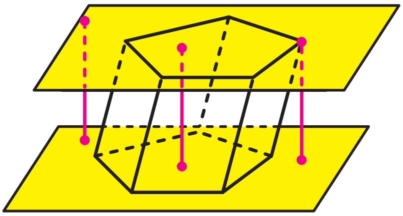


**Рис. 16.6**

**Означення. Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.**

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

**Означення. Призму називають правильною, якщо вона є прямою та її основа — правильний многокутник.**

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 16.7 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

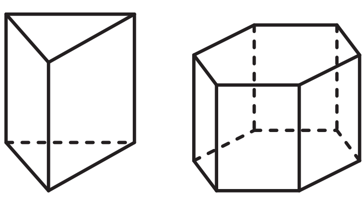


**Рис. 16.7**

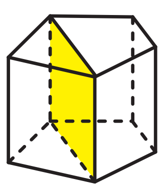


**Рис. 16.8**

Розглянемо опуклу $n$-кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 16.8). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми.**

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а прямої призми — прямокутник.

**Площею бічної поверхні призми** називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа поверхні призми, $S_б$ — площа бічної поверхні призми, $S_{осн}$ — площа основи призми.

**Теорема 16.1.** ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

*Доведення.* Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини ребер основи призми, $b$ — довжина бічного ребра. Тоді $S_б = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◄

Результат теореми 16.1 зручно подати у вигляді формули:

$$\boxed{S_б = P_{осн} \cdot b,}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи прямої призми, $b$ — довжина бічного ребра.

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 16.9.

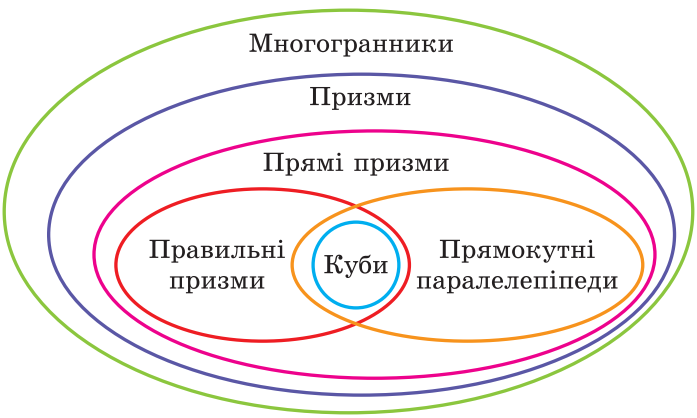



**Рис. 16.9**

1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Що називають двогранним кутом многогранника?
4. Який многогранник називають опуклим?
5. Що називають призмою?
6. Що називають висотою призми?
7. Яку призму називають прямою? похилою?
8. Яку призму називають правильною?
9. Що називають діагональним перерізом призми?
10. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
11. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?

## ВПРАВИ

**16.1.°** Яку найменшу кількість граней може мати призма? Скільки ця призма має: 1) вершин; 2) ребер; 3) бічних ребер?

**16.2.°** Призма має 12 граней. Який многокутник лежить у її основі?

**16.3.°** У якій призмі бічні ребра паралельні її висоті?

**16.4.°** Чи є правильним твердження:
1) бічне ребро прямої призми перпендикулярне до будь-якої діагоналі її основи;
2) якщо всі ребра призми рівні, то вона є правильною;
3) якщо всі ребра прямої призми рівні, то вона є правильною?

**16.5.°** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, один із кутів якої дорівнює $110°$ (рис. 16.10). Знайдіть двогранні кути призми при її бічних ребрах.

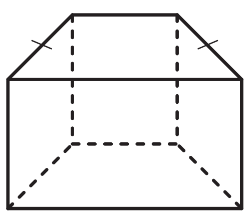


**Рис. 16.10**

**16.6.°** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота — $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть діагональ призми.

**16.7.°** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть висоту призми.

**16.8.°** Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.

**16.9.**° Знайдіть сторону основи правильної семикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 420 см$^2$.

**16.10.**° Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює $a$, а висота дорівнює $H$.

**16.11.**° Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює $a$, а висота дорівнює $H$.

**16.12.**° Кут між бічним ребром і площиною основи похилої призми дорівнює $30°$, висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть бічне ребро призми.

**16.13.**• Точки $D$ і $E$ — середини ребер $AC$ і $BC$ правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 16.11). Площина, яка проходить через пряму $DE$ та утворює з площиною $ABC$ кут $30°$, перетинає ребро $CC_1$ у точці $F$. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

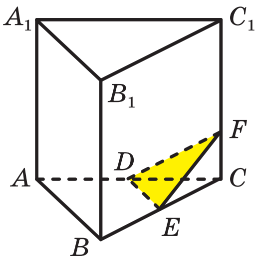



**Рис. 16.11**

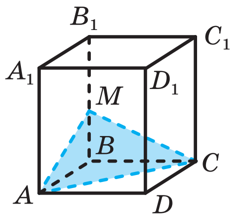



**Рис. 16.12**

**16.14.**• Через діагональ $AC$ основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною $ABC$ кут $45°$ і перетинає ребро $BB_1$ у точці $M$ (рис. 16.12). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.

**16.15.**• Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $a$, а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить $30°$. Знайдіть:
1) висоту призми;
2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.

**16.16.**• Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює $a$.

**16.17.**• Основа прямої призми — ромб зі стороною $a$ і гострим кутом $\alpha$. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть висоту призми.

**16.18.**• Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.

**16.19.**• Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні — 270 см$^2$. Знайдіть висоту призми.

**16.20.**• Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 96 см$^2$, а площа повної поверхні — 128 см$^2$. Знайдіть висоту призми.

**16.21.**• Обчисліть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 30°.

**16.22.**• Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

**16.23.**•• Прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Через пряму $CC_1$ проведено площину, яка перпендикулярна до прямої $AB$ і перетинає ребро $AB$ у точці $D$. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо $AD = 18$ см, $BD = 2$ см, а висота призми дорівнює 8 см.

**16.24.**•• Прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, відрізок $CM$ — медіана трикутника $ABC$. Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі $CC_1$ і $CM$, якщо $AC = 30$ см, $BC = 40$ см.

**16.25.**•• Кожне ребро правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $a$. Знайдіть:

1) площу перерізу призми, який проходить через точки $A$, $B$ і $C_1$;
2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.

**16.26.**•• Прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Площина, яка проходить через пряму $AC$, утворює з площиною основи призми кут $\beta$ і перетинає ребро $BB_1$ у точці $D$. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

**16.27.**•• Основою прямої призми є ромб з гострим кутом $\alpha$, більша діагональ ромба дорівнює $d$. Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут $\beta$. Знайдіть:

1) висоту призми;
2) площу утвореного перерізу призми.

**16.28.**•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, основи якої $BC$ і $AD$ відповідно дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см$^2$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

**16.29.**•• Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 288 см$^2$. Знайдіть сторону основи та висоту призми.

**16.30.*** Висота правильної чотирикутної призми дорівнює $h$. У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює $\alpha$.

**16.31.*** Висота правильної трикутної призми дорівнює $h$. Кут між діагоналями двох бічних граней, які мають спільний кінець, дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**16.32.** Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 18 см, а радіус описаного навколо нього кола — 15 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

**16.33.** Більша діагональ ромба дорівнює $d$, а його гострий кут дорівнює $\alpha$. Знайдіть:
1) сторону ромба;
2) меншу діагональ ромба;
3) площу ромба;
4) радіус кола, вписаного в ромб.

# 17. Паралелепіпед

**Означення. Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.**

На рисунку 17.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 17.1 грані $AA_1B_1B$ і $DD_1C_1C$ є протилежними.

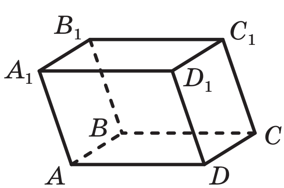


**Рис. 17.1**

Оскільки $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (рис. 17.1), то за ознакою паралельності площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

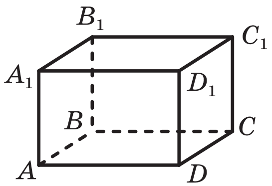



**Рис. 17.2**

На рисунку 17.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 17.2 довжини ребер $AB$, $AD$ і $AA_1$ є вимірами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри рівні. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 17.3.


**Рис. 17.3**

**Теорема 17.1.** ***Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.***

*Доведення.* Розглянемо діагональ $AC_1$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.4).

Доведемо, що $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Оскільки трикутник $ABC$ прямокутний ($\angle ABC = 90°$), то можна записати: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Оскільки $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

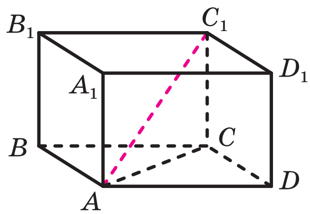



**Рис. 17.4**

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому $C_1C \perp ABC$. Отже, трикутник $ACC_1$ прямокутний ($\angle ACC_1 = 90°$). Тоді $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Оскільки $CC_1 = AA_1$, то $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$.

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◄

З теореми 17.1 випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

1. Що називають паралелепіпедом?
2. Які грані паралелепіпеда називають протилежними?
3. Який паралелепіпед називають прямим?
4. Який паралелепіпед називають прямокутним?
5. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
6. Який прямокутний паралелепіпед називають кубом?
7. Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.

## ВПРАВИ

**17.1.°** Чи можна вважати правильним таке означення куба: «Кубом називають правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює стороні основи»?

**17.2.°** Доведіть, що в прямому паралелепіпеді площина діагонального перерізу перпендикулярна до площини основи.

**17.3.**° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

**17.4.**° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

**17.5.**° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

**17.6.**° Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 1 : 2 : 2, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 6 см.

**17.7.**° Ребро куба дорівнює $a$. Чому дорівнює діагональ куба?

**17.8.**° Площа поверхні куба дорівнює 216 см$^2$. Знайдіть площу його діагонального перерізу.

**17.9.**• Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.5), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою $DC_1$ і площиною $BCC_1$;
2) між прямою $B_1D$ і площиною $ABB_1$.

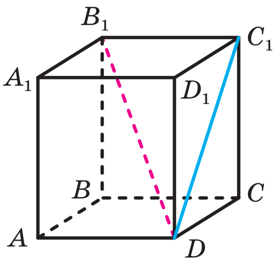


**Рис. 17.5**

**17.10.**• Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 17.5), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою $DC_1$ і площиною $A_1B_1C_1$;
2) між прямою $B_1D$ і площиною $ABC$.

**17.11.**• Із чотирьох рівних кубів, ребро яких дорівнює 1 см, склали прямокутний паралелепіпед. Чому дорівнює площа повної поверхні цього паралелепіпеда?

**17.12.**• Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом $\alpha$ і меншою діагоналлю $d$. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

**17.13.**• Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 6 см і кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

**17.14.**•• Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 4 см, а один із кутів основи дорівнює 45°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

**17.15.••** Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см, а один із кутів основи дорівнює $30°$. Площа діагонального перерізу паралелепіпеда, який проходить через меншу діагональ основи, дорівнює 8 см$^2$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

**17.16.••** Доведіть, що коли діагоналі прямого паралелепіпеда рівні, то даний паралелепіпед є прямокутним.

**17.17.••** Основа $ABCD$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом. Вершина $A_1$ рівновіддалена від усіх вершин основи $ABCD$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро паралелепіпеда — 6 см.

**17.18.••** Основа $ABCD$ похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом, а площини граней $AA_1B_1B$ і $CC_1D_1D$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані $AA_1D_1D$, якщо кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 8 см.

**17.19.*** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють $S_1$ і $S_2$. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

**17.20.*** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює $S$. Площі діагональних перерізів дорівнюють $S_1$ і $S_2$. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

### ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**17.21.** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 23 см і 17 см, а діагональ — 25 см.

**17.22.** Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 10 см, а один із кутів — $45°$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

## 18. Піраміда

**Означення.** **Многогранник, одна грань якого — $n$-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають $n$-кутною пірамідою.**

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди; $n$-кутник, про який ідеться в означенні, називають основою піраміди, а його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 18.1).

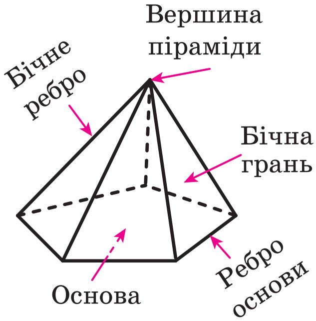



Рис. 18.1

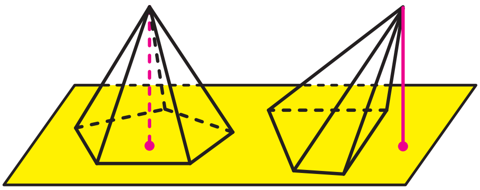


Рис. 18.2

**Висотою піраміди** називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи (рис. 18.2).

Розглянемо опуклу $n$-кутну піраміду ($n > 3$). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основу піраміди по діагоналі (рис. 18.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

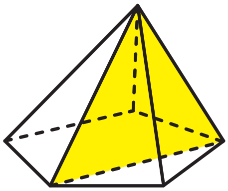


Рис. 18.3

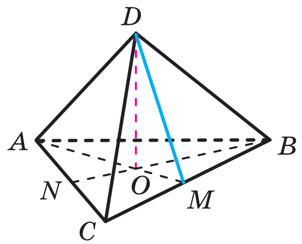



Рис. 18.4

**Означення. Піраміду називають *правильною*, якщо її основа — правильний многокутник і основа висоти піраміди є центром цього многокутника.**

На рисунку 18.4 зображено правильну трикутну піраміду $DABC$ з основою $ABC$. Трикутник $ABC$ є рівностороннім. Проекцією вершини $D$ на площину $ABC$ є центр трикутника — точка $O$. Для знаходження цієї точки на рисунку 18.4 проведено медіани $AM$ і $BN$ трикутника $ABC$.

На рисунку 18.5 зображено правильну чотирикутну піраміду $EABCD$. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, точка $O$ — його центр, відрізок $EO$ — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проекція вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи — це точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

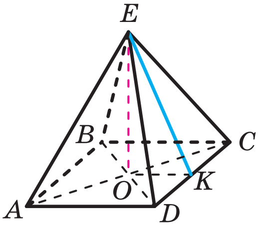


**Рис. 18.5**

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

*Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники* (доведіть це самостійно).

**Апофемою правильної піраміди** називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 18.4 проведено відрізок $DM$, де точка $M$ — середина ребра $BC$. Оскільки трикутник $BCD$ — рівнобедрений з основою $BC$, то відрізок $DM$ є його висотою. Отже, відрізок $DM$ — апофема правильної трикутної піраміди $DABC$.

На рисунку 18.5 відрізок $EK$, де точка $K$ — середина ребра $DC$, є апофемою правильної чотирикутної піраміди $EABCD$.

*Усі апофеми правильної піраміди рівні* (доведіть це самостійно).

**Площею бічної поверхні піраміди** називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\text{п}} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}},$$

де $S_{\text{п}}$ — площа поверхні піраміди, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди.

**Теорема 18.1.** ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.***

*Доведення.* Розглянемо правильну $n$-кутну піраміду з ребром основи, що дорівнює $a$, та апофемою, що дорівнює $d$. Тоді площа бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}ad$. Усі бічні грані правильної $n$-кутної піраміди — рівні трикутники, тому площа бічної поверхні дорівнює $\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, тобто $S_б = \left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n = \frac{1}{2}(an)\cdot d$. Оскільки добуток $an$ дорівнює периметру основи, то теорему доведено. ◄

Результат теореми 18.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{S_б = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot d,}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи піраміди, $d$ — довжина апофеми правильної піраміди.

Можна довести, що мають місце такі твердження.

1) *Якщо бічні ребра піраміди рівні або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди.*

Наприклад, якщо бічні ребра піраміди рівні, а її основою є прямокутний трикутник, то проекцією вершини піраміди на площину основи є середина гіпотенузи основи (рис. 18.6).

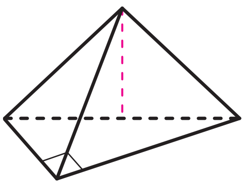


**Рис. 18.6**

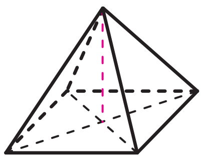


**Рис. 18.7**

2) *Якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди.*

Наприклад, якщо основою піраміди є ромб і всі двогранні кути піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є точка перетину діагоналей ромба (рис. 18.7).

3) *Якщо кожний із двогранних кутів опуклої піраміди при ребрах основи дорівнює $\alpha$, то площу бічної поверхні піраміди $S_б$ можна обчислити за формулою*

$$S_б = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha},$$

*де $S_{осн}$ — площа основи піраміди.*

1. Що називають пірамідою?
2. Що називають висотою піраміди?
3. Який переріз називають діагональним перерізом піраміди?
4. Яку піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної піраміди?
6. Що називають площею поверхні піраміди? бічної поверхні піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?

## ВПРАВИ

**18.1.°** Скільки $n$-кутна піраміда має:
1) вершин; 2) граней; 3) ребер?

**18.2.°** Яку найменшу кількість граней може мати піраміда?

**18.3.°** На рисунку 18.8 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:
1) висоту піраміди;
2) кут нахилу ребра $SA$ до площини основи;
3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі $BC$.

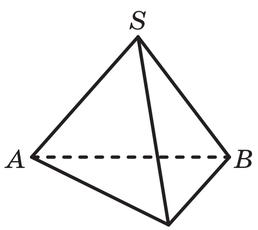


**Рис. 18.8**

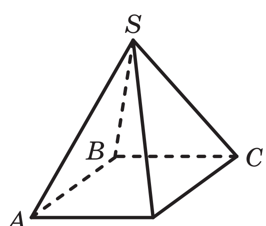


**Рис. 18.9**

**18.4.°** На рисунку 18.9 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:
1) висоту піраміди;
2) кут нахилу ребра $SC$ до площини основи;
3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі $AD$.

**18.5.°** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

**18.6.°** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть сторону основи піраміди.

**18.7.°** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:
1) апофему піраміди;
2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

**18.8.°** Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а сторона основи — 6 см. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

**18.9.°** Сторона основи правильної семикутної піраміди дорівнює 10 см, а її апофема — 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.10.°** Плоский кут при вершині правильної восьмикутної піраміди дорівнює 30°, а бічне ребро — 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.11.°** Площа бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди дорівнює 300 см$^2$, а її апофема — 15 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

**18.12.°** Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

**18.13.°** Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

**18.14.•** Основою піраміди $MABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагональ $BD$ якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро $MA$, що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть ребро $MD$.

**18.15.•** Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 24 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 16 см.

**18.16.•** Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює $b$, утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.

**18.17.•** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

**18.18.**• Доведіть, що в правильній піраміді:

1) бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
2) двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними.

**18.19.**• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $a$, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.20.**• Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $d$, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.21.**• Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см та утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.22.**• Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**18.23.**•• Точки $D$, $E$ і $F$ — середини ребер $AB$, $AM$ і $MC$ правильної піраміди $MABC$ відповідно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см.

1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки $D$, $E$ і $F$.
2) Доведіть, що побудований переріз є прямокутником.
3) Знайдіть площу перерізу.

**18.24.**•• Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через основу її висоти паралельно мимобіжним ребрам піраміди. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро — 12 см.

**18.25.**•• Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.

**18.26.**•• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

**18.27.**•• Основою піраміди є ромб зі стороною 8 см і кутом $30°$. Кожний із двогранних кутів піраміди при ребрах основи дорівнює $45°$. Знайдіть:

1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

**18.28.••** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $30°$. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

**18.29.••** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $60°$. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

**18.30.••** Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) площу бічної поверхні піраміди.

**18.31.••** Основою піраміди є квадрат зі стороною 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**18.32.** Продовження бічних сторін $AB$ і $CD$ трапеції $ABCD$ перетинаються в точці $M$, $CD : CM = 3 : 5$, відрізок $BC$ — менша основа трапеції. Сума основ трапеції дорівнює 26 см. Знайдіть відрізок $AD$.

**18.33.** Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами $BC$ і $AD$ перетинаються в точці $O$. Знайдіть відношення площ трикутників $BOC$ і $AOD$, якщо $BC = 3$ см, $AD = 9$ см.

## КРАСА ТА РОЗУМ УКРАЇНИ

Роксолана, Соломія Крушельницька, Леся Українка — відомі в усьому світі українки минулого.

Сучасні українські дівчата стають найкращими не тільки в політиці та мистецтві, а й на аренах математичних змагань. У найпрестижнішій Європейській математичній олімпіаді для дівчат (EGMO) українські школярки Софія Дубова (2014 рік), Ольга Шевченко (2017 рік) та Аліна Гарбузова (2018 рік) тричі виборювали першість серед усіх учасниць, розв'язавши абсолютно всі запропоновані задачі. Узагалі, українська команда дівчат досі залишається єдиною командою Європи, яка тричі ставала першою в офіційному командному заліку. Такі досягнення переконали європейську спільноту вибрати місцем проведення EGMO у 2019 р. місто Київ. Упевнені, що в черговий раз побачимо наших розумниць на вершині п'єдесталу пошани.

**Команда України на першій олімпіаді EGMO (Кембридж, Велика Британія, 2012 рік)**

Склад команди (*зліва направо*): Харитонова Олена (срібло); Кравченко Юлія (срібло); Павлюк Марія (срібло); Сердюк Ярослава (срібло)

## ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.

А) 900 см$^2$; Б) 450 см$^2$; В) 600 см$^2$; Г) 2640 см$^2$.

**2.** Чому дорівнює висота правильної чотирикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює $9\sqrt{2}$ см, а діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 30°?

А) $9\sqrt{3}$ см; Б) $9\sqrt{2}$ см; В) $6\sqrt{3}$ см; Г) $6\sqrt{2}$ см.

**3.** Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 6 см і кутом 120° при вершині. Діагональ бічної грані призми, яка містить основу рівнобедреного трикутника, нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту призми.

А) 9 см; Б) 18 см; В) 12 см; Г) $6\sqrt{3}$ см.

**4.** Знайдіть діагональ бічної грані правильної чотирикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 6 см, а діагональ призми — 10 см.

А) 4 см; Б) $2\sqrt{2}$ см; В) 8 см; Г) $4\sqrt{3}$ см.

**5.** Обчисліть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, бічні грані якої — квадрати з діагоналлю 8 см.

А) 32 см$^2$; Б) 96 см$^2$; В) 64 см$^2$; Г) 192 см$^2$.

**6.** Основа прямої призми — ромб з діагоналями 10 см і 24 см. Менша діагональ призми дорівнює 26 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

А) 312 см$^2$; Б) 624 см$^2$; В) 2496 см$^2$; Г) 1248 см$^2$.

**7.** Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{29}$ см, а два його виміри — 2 см і 3 см. Знайдіть третій вимір прямокутного паралелепіпеда.

А) 2 см; Б) $\sqrt{15}$ см; В) 4 см; Г) $3\sqrt{2}$ см.

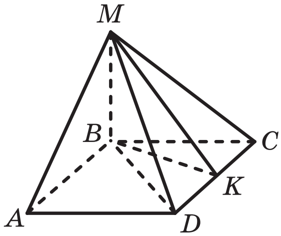
**8.** У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AD = 24$ см, $CD = 5$ см, $AA_1 = 10$ см. Чому дорівнює площа чотирикутника $A_1B_1CD$?

А) 100 см$^2$; Б) 120 см$^2$; В) 125 см$^2$; Г) 130 см$^2$.

**9.** Обчисліть площу бічної поверхні правильної шестикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а апофема — 12 см.

А) 288 см$^2$; Б) 576 см$^2$; В) 144 см$^2$; Г) 192 см$^2$.

**10.** Основою піраміди $MABCD$, зображеної на рисунку, є квадрат, бічне ребро $MB$ перпендикулярне до площини основи піраміди, точка $K$ — середина відрізка $CD$. Укажіть лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі $CD$.




А) $\angle MAB$; В) $\angle MKB$;
Б) $\angle MDB$; Г) $\angle MCB$.

**11.** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 15 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.
А) 540 см$^2$; Б) 270 см$^2$; В) 1080 см$^2$; Г) 720 см$^2$.

**12.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — $\sqrt{22}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
А) 90 см$^2$; Б) 45 см$^2$; В) 60 см$^2$; Г) 30 см$^2$.

**13.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а її діагональний переріз — прямокутний трикутник. Знайдіть висоту піраміди.

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; Г) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

**14.** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює $\alpha$. Відрізок, який сполучає середину висоти піраміди та середину апофеми, дорівнює $a$. Знайдіть висоту піраміди.

А) $2a\sin\alpha$; Б) $2a\cos\alpha$; В) $2a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; Г) $\frac{2a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

**15.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
А) 32 см$^2$; Б) 64 см$^2$; В) $32\sqrt{3}$ см$^2$; Г) $64\sqrt{3}$ см$^2$.

**16.** Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть апофему піраміди.
А) 4 см; Б) $2\sqrt{14}$ см; В) $4\sqrt{7}$ см; Г) $4\sqrt{2}$ см.

**17.** Основа піраміди — ромб зі стороною $a$ і кутом $\alpha$. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А) $\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$; Б) $\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$; В) $a^2\sin\alpha\cos\beta$; Г) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\beta$.

**18.** В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом $b$ і протилежним йому кутом $\beta$. Бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут $\gamma$. Знайдіть висоту піраміди.

А) $\frac{b\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\beta}$; Б) $\frac{b\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\sin\beta}$; В) $\frac{1}{2}b\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$; Г) $\frac{1}{2}b\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

### Многогранник

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

### Призма

Многогранник, дві грані якого — рівні $n$-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта $n$ граней — паралелограми, називають $n$-кутною призмою.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Призму називають правильною, якщо вона є прямою та її основа — правильний многокутник.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи.

### Площа бічної поверхні прямої призми

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

### Паралелепіпед

Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

Паралелепіпед називають прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають вимірами прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри рівні.

**Властивість прямокутного паралелепіпеда**

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

**Піраміда**

Многогранник, одна грань якого — $n$-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають $n$-кутною пірамідою.

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи.

Піраміду називають правильною, якщо її основа — правильний многокутник і основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники.

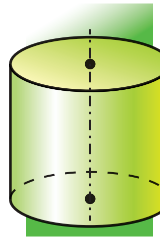
Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

**Площа бічної поверхні піраміди**

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.

# §5 ТІЛА ОБЕРТАННЯ



У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомими вам тілами – циліндром, конусом, кулею, вивчите їхні властивості.

## 19. Циліндр

Уявимо, що прямокутник $OO_1A_1A$ обертається навколо сторони $OO_1$ (рис. 19.1). Під час обертання утворюється фігура, яку називають **циліндром**. Круги із центрами $O$ і $O_1$, які утворилися в результаті обертання сторін $OA$ і $O_1A_1$, називають **основами циліндра**, а фігуру, яка утворилася в результаті обертання сторони $A_1A$, називають **бічною поверхнею циліндра**. Відрізки, що утворюють бічну поверхню циліндра, називають **твірними циліндра** (рис. 19.2).

Очевидно, що всі твірні циліндра рівні та перпендикулярні до площини основи.

**Висотою циліндра** називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Висота циліндра дорівнює його твірній.

Пряму, яка проходить через центри основ циліндра, називають **віссю циліндра**. На рисунку 19.2 пряма $OO_1$ — вісь циліндра.

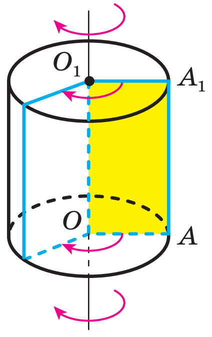



**Рис. 19.1**

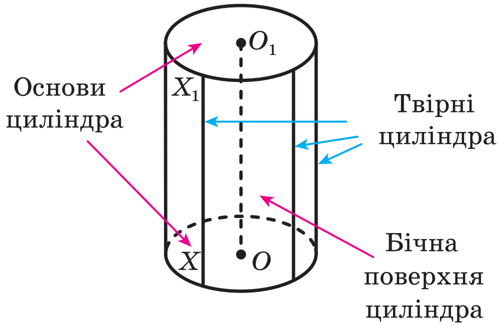



**Рис. 19.2**

**Тілом обертання** називають тіло, отримане в результаті обертання деякої плоскої фігури навколо прямої.

Циліндр є прикладом тіла обертання.

Якщо перетнути циліндр площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється прямокутник, дві сторони якого — діаметри основ циліндра, а дві інші — твірні циліндра (рис. 19.3). Такий переріз називають **осьовим перерізом циліндра**.

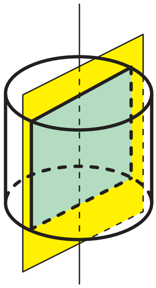


**Рис. 19.3**

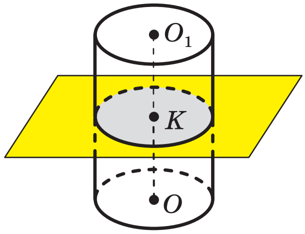



**Рис. 19.4**

Перетнемо циліндр площиною, паралельною основам циліндра (рис. 19.4). Перерізом циліндра площиною, паралельною основам (або перпендикулярною до осі циліндра), є круг, що дорівнює основі циліндра.

Уявимо собі, що поверхню циліндра розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 19.5), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою циліндра на площину** або просто **розгорткою циліндра**. Вона складається з двох кругів, які дорівнюють основам циліндра, і прямокутника, який називають розгорткою бічної поверхні циліндра (рис. 19.6).

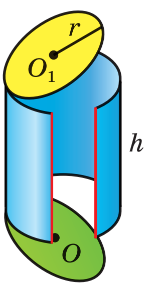



**Рис. 19.5**

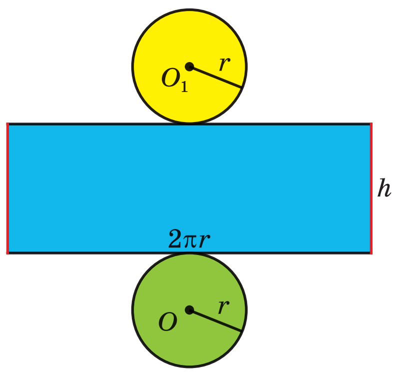



**Рис. 19.6**

Якщо твірна циліндра дорівнює $h$, а радіус основи циліндра — $r$, то сторони розгортки бічної поверхні циліндра дорівнюють $h$ і $2\pi r$.

*За площу бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні*. Отже,

$$\boxed{S_б = 2\pi rh,}$$

де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, $r$ — радіус основи циліндра, $h$ — довжина висоти циліндра.

**Площею повної поверхні циліндра** називають суму площ бічної поверхні циліндра та двох його основ. Маємо:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра, $S_{осн}$ — площа основи циліндра.

Площа основи циліндра дорівнює $\pi r^2$. Тоді отримуємо формулу

$$\boxed{S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

Із курсу геометрії 10 класу ви знаєте, що паралельною проекцією кола є фігура, яку називають еліпсом. Тому, зображаючи циліндр, його основи рисують у вигляді еліпсів. На практиці для зображення еліпсів зручно користуватися лекалами (рис. 19.7).


**Рис. 19.7**

1. Яке тіло називають циліндром?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею циліндра.
3. Що називають основами циліндра? віссю циліндра? висотою циліндра?
4. Яке тіло називають тілом обертання?
5. Що називають осьовим перерізом циліндра?
6. З яких фігур складається розгортка циліндра?
7. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
8. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні циліндра?

## ВПРАВИ

**19.1.°** Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус основи — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

**19.2.°** Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 128 см$^2$. Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см.

**19.3.°** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $d$ і утворює з площиною основи циліндра кут $\alpha$. Знайдіть:
1) висоту циліндра; 2) площу основи циліндра.

**19.4.°** Площа основи циліндра дорівнює $49\pi$ см$^2$, а кут між діагоналлю осьового перерізу та твірною циліндра дорівнює $30°$. Знайдіть висоту циліндра.

**19.5.°** Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота — 9 см?

**19.6.°** Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертають навколо більшої сторони. Знайдіть:
1) діагональ осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

**19.7.°** Квадрат зі стороною 8 см обертають навколо однієї з його сторін. Знайдіть:
1) площу осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

**19.8.°** Точки $O$ і $O_1$ — центри нижньої та верхньої основ циліндра відповідно (рис. 19.8). Точка $A$ — довільна точка кола, яке обмежує нижню основу циліндра. Відрізок $O_1A$ дорівнює 6 см і утворює з площиною основи циліндра кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

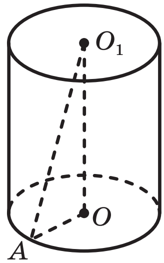


**Рис. 19.8**

**19.9.°** Висота циліндра дорівнює 5 см, а діаметр основи — 24 см. Знайдіть відстань від центра однієї основи циліндра до точки кола другої основи.

**19.10.•** Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює $d$ і утворює з однією зі сторін розгортки кут $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

**19.11.•** Квадрат, діагональ якого дорівнює $4\pi$ см, є розгорткою бічної поверхні циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

**19.12.•** Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
1) радіус його основи збільшити в $k$ разів;
2) висоту циліндра зменшити в $k$ разів;
3) висоту циліндра збільшити в $k$ разів, а радіус основи зменшити в $k$ разів?

Якою функцією є залежність площі бічної поверхні циліндра від: 1) радіуса його основи; 2) висоти циліндра?

**19.13.•** У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $120°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина даної хорди дорівнює 6 см.

**19.14.•** У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $90°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 8 см.

**19.15.••** У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $\alpha$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює $a$.

**19.16.••** У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $\beta$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи й середину даної хорди, дорівнює $m$ та утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

**19.17.••** Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см, а висота — 12 см, проведено переріз, що є квадратом. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

**19.18.••** Паралельно осі циліндра проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$.

Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут β, а радіус основи дорівнює $R$. Знайдіть площу цього перерізу.

**19.19.**•• Паралельно осі циліндра проведено переріз, що віддалений від неї на $\sqrt{3}$ см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 120°. Знайдіть площу цього перерізу, якщо його діагональ дорівнює 10 см.

**19.20.*** Точки $O$ і $O_1$ — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, точка $A$ належить нижній основі циліндра (рис. 19.9). На відрізку $OO_1$ позначено точку $B$ так, що пряма $AB$ перетинає бічну поверхню циліндра. Побудуйте точку перетину прямої $AB$ з бічною поверхнею циліндра.

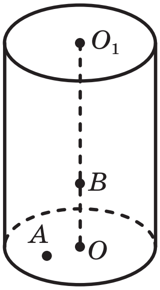



**Рис. 19.9**

**19.21.*** Радіус основи циліндра дорівнює 9 см. Із середини відрізка $OO_1$, де точки $O$ і $O_1$ — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, проведено промінь, який перетинає площину нижньої основи в точці, віддаленій від центра цієї основи на 12 см. Цей промінь перетинає твірну циліндра в точці, віддаленій від площини нижньої основи на 2 см. Знайдіть висоту циліндра.

**19.22.*** Висота циліндра дорівнює 20 см. Через середину твірної циліндра проведено пряму, яка перетинає відрізок, що сполучає центри основ, у точці, віддаленій на 6 см від площини нижньої основи, а саму цю площину — у точці, віддаленій на 15 см від центра нижньої основи. Знайдіть радіус основи циліндра.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**19.23.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює $h$, а кут між його рівними сторонами дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

**19.24.** Основи трапеції дорівнюють 6 см і 27 см, а одна з бічних сторін — 13 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в дану трапецію.

**19.25.** Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні — 288 см$^2$. Знайдіть більшу діагональ призми.

# 20. Конус

Уявимо, що прямокутний трикутник $AOB$ з прямим кутом $O$ обертається навколо сторони $AO$ (рис. 20.1). Під час обертання утворюється фігура, яку називають **конусом**. Круг із центром $O$, який утворився в результаті обертання сторони $OB$, називають **основою конуса**, а фігуру, яка утворилася в результаті обертання сторони $AB$, називають **бічною поверхнею конуса**. Відрізки, що утворюють бічну поверхню конуса, називають **твірними конуса** (рис. 20.2).

Усі твірні конуса є рівними й утворюють рівні кути з площиною основи.

Спільний кінець усіх твірних конуса називають **вершиною конуса**. На рисунку 20.1 точка $A$ — вершина конуса.

Пряму, яка проходить через вершину конуса та центр його основи, називають **віссю конуса**. На рисунку 20.1 пряма $AO$ — вісь конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини його основи.

**Висотою конуса** називають перпендикуляр, опущений з вершини конуса на площину основи. Основою висоти конуса є центр його основи. Висота конуса належить його осі. На рисунку 20.1 відрізок $AO$ — висота конуса.

Конус так само, як і циліндр, є тілом обертання.

Якщо конус перетнути площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утвориться рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого — твірні конуса, основа — діаметр основи конуса (рис. 20.3). Такий переріз називають **осьовим перерізом конуса**.

Уявимо собі, що поверхню конуса розрізали по колу основи та деякій твірній (рис. 20.4), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою конуса на площину** або просто **розгорткою конуса** (рис. 20.5). Вона складається з круга, що

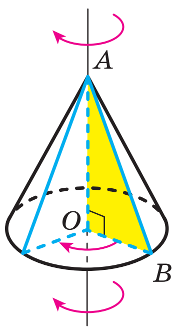



Рис. 20.1

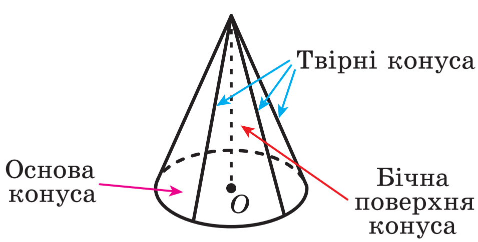



Рис. 20.2

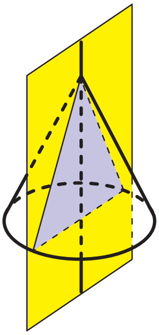


**Рис. 20.3**

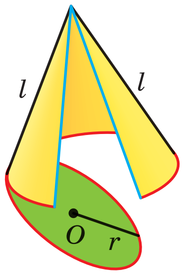



**Рис. 20.4**

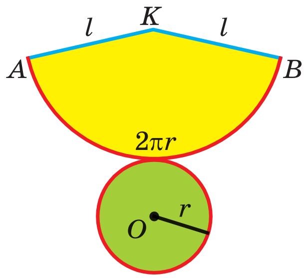



**Рис. 20.5**

дорівнює основі конуса, і кругового сектора, який називають **розгорткою бічної поверхні конуса**.

Якщо твірна конуса дорівнює $l$, а радіус основи конуса — $r$, то радіус кругового сектора дорівнює $l$, а довжина дуги сектора — $2\pi r$. Нехай градусна міра кута $AKB$ (рис. 20.5) дорівнює $\alpha$. Тоді довжина дуги $AB$ дорівнює $\frac{\pi l \alpha}{180}$. Маємо: $2\pi r = \frac{\pi l \alpha}{180}$. Звідси

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (1)$$

*За площу $S_б$ бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні*. Маємо: $S_б = \frac{\pi l^2 \alpha}{360}$. З урахуванням рівності (1) отримуємо: $S_б = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l$.

Отже, площу бічної поверхні конуса обчислюють за формулою

$$\boxed{\boldsymbol{S_б = \pi r l},}$$

де $r$ — радіус основи конуса, $l$ — довжина твірної конуса.

**Площею повної поверхні конуса** називають суму площ бічної поверхні та основи конуса. Маємо:

$$\boxed{\boldsymbol{S_п = S_б + S_{осн}},}$$

де $S_п$ — площа повної поверхні конуса, $S_{осн}$ — площа основи конуса.

Площа основи конуса дорівнює $\pi r^2$. Тоді отримуємо формулу

$$\boxed{\boldsymbol{S_п = \pi r l + \pi r^2}}$$

1. Яке тіло називають конусом?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею конуса.
3. Що називають основою конуса? віссю конуса? висотою конуса?
4. Що називають осьовим перерізом конуса?
5. З яких фігур складається розгортка конуса?
6. Що приймають за площу бічної поверхні конуса?
7. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні конуса?
8. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні конуса?

## ВПРАВИ

**20.1.°** Висота конуса дорівнює 4 см, а його твірна — 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.

**20.2.°** Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а його твірна — 13 см. Знайдіть висоту конуса.

**20.3.°** Знайдіть радіус основи та висоту конуса, якщо його твірна дорівнює 18 см, а осьовий переріз конуса є правильним трикутником.

**20.4.°** Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а його осьовий переріз — рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть висоту конуса та його твірну.

**20.5.°** Радіус основи конуса дорівнює 9 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює $30^\circ$. Знайдіть площу:
1) бічної поверхні конуса;
2) осьового перерізу конуса.

**20.6.°** Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а висота — 8 см. Знайдіть площу:
1) бічної поверхні конуса;
2) повної поверхні конуса.

**20.7.°** Висота конуса дорівнює $H$, а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу:
1) осьового перерізу конуса;
2) бічної поверхні конуса.

**20.8.°** Твірна конуса дорівнює $a$, а кут у його осьовому перерізі при вершині конуса дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу:
1) осьового перерізу конуса;
2) бічної поверхні конуса.

**20.9.**° Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 8 см, а один із кутів дорівнює $30°$, обертається навколо більшого катета. Знайдіть площу бічної поверхні утвореного конуса.

**20.10.**° Знайдіть площу осьового перерізу конуса, який утворився в результаті обертання прямокутного трикутника з гіпотенузою 17 см і катетом 15 см навколо другого катета.

**20.11.**• Радіус основи конуса дорівнює 15 см, а відстань від центра основи до твірної конуса — 12 см. Знайдіть твірну та висоту конуса.

**20.12.**• Висота конуса дорівнює $4\sqrt{5}$ см, а відстань від центра основи до середини твірної конуса — 6 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

**20.13.**• В основі конуса проведено хорду завдовжки $a$, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$. Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює $\beta$. Знайдіть висоту конуса.

**20.14.**• В основі конуса проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$. Кут між висотою конуса та його твірною дорівнює $\beta$, а довжина твірної дорівнює $m$. Знайдіть дану хорду.

**20.15.**• Прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см обертається навколо прямої, яка містить його гіпотенузу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.16.**•• Площина, проведена через дві твірні конуса, перетинає основу по хорді, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $\beta$ $(0° < \beta < 180°)$. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо висота конуса дорівнює $H$, а кут між площиною перерізу та площиною основи конуса дорівнює $\alpha$.

**20.17.**•• Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює $60°$, проведено площину. Ця площина перетинає основу конуса по хорді завдовжки 8 см, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $90°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

**20.18.**•• Рівнобедрений гострокутний трикутник з основою $a$ і кутом $\alpha$ при основі обертається навколо прямої, яка містить його бічну сторону. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.19.**•• Рівнобедрений трикутник з основою $a$ і протилежним їй кутом $\alpha$ обертається навколо прямої, яка містить його основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.20.**•• Прямокутна трапеція з основами 6 см і 9 см та висотою 4 см обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.21.**•• Прямокутна трапеція з основами 3 см і 4 см та гострим кутом $45^\circ$ обертається навколо прямої, яка містить її меншу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.22.**•• Ромб зі стороною 10 см і кутом $60^\circ$ обертається навколо прямої, яка містить одну зі сторін ромба. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.23.**•• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 26 см, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Трапеція обертається навколо прямої, яка містить її більшу основу. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

**20.24.**•• Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 12 см, а градусна міра дуги — $240^\circ$. Знайдіть радіус основи конуса.

**20.25.**•• Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 5 см. Знайдіть центральний кут цього сектора, якщо висота конуса дорівнює 4 см.

**20.26.**•• Через дві твірні конуса проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут $\alpha$. Відстань від центра основи конуса до цієї площини дорівнює $a$, а кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює $\beta$. Знайдіть радіус основи конуса.

**20.27.**•• Відрізок $MO$ — висота конуса, відрізки $MA$ і $MB$ — його твірні, $MO = 4\sqrt{2}$ см. Відстань від точки $O$ до прямої $AB$ дорівнює 2 см. Знайдіть відстань від точки $O$ до площини $AMB$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**20.28.** Відрізки $AD$ і $CE$ — медіани трикутника $ABC$. Знайдіть сторону $AC$, якщо $AB = 8\sqrt{5}$ см, $BC = 6\sqrt{5}$ см і $AD \perp CE$.

**20.29.** Площа рівнобічної трапеції дорівнює $32\sqrt{3}$ см$^2$, а гострий кут — $60^\circ$. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо відомо, що в трапецію можна вписати коло.

**20.30.** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з кутом $30^\circ$ при основі та бічною стороною 12 см. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут $60^\circ$. Знайдіть висоту піраміди.

# 21. Куля та сфера

У попередніх пунктах ви ознайомилися з двома прикладами тіл обертання — циліндром і конусом. Ще одним прикладом тіла обертання є куля.

На рисунку 21.1 зображено фігуру, отриману обертанням півкруга навколо прямої, яка містить його діаметр $AB$. Таку фігуру називають **кулею.**

При обертанні півкола з діаметром $AB$ утворюється поверхня, яку називають **сферою** (рис. 21.1). Сфера — поверхня отриманої кулі.

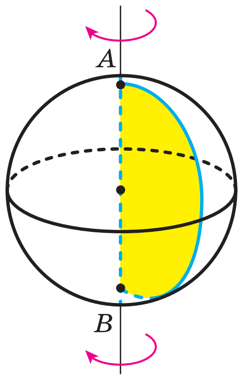



**Рис. 21.1**

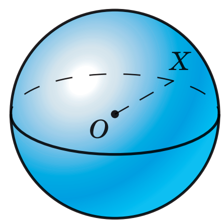



**Рис. 21.2**

Середину відрізка $AB$ називають **центром сфери**. Будь-який відрізок, який сполучає точку сфери з її центром, називають **радіусом сфери**. Довжину цього відрізка також прийнято називати радіусом сфери. На рисунку 21.2 відрізок $OX$ — радіус сфери.

Можна довести, що *всі радіуси сфери є рівними*.

Іншими словами, *усі точки сфери рівновіддалені від її центра*.

Відрізок, який сполучає дві точки сфери та проходить через її центр, називають **діаметром сфери**. Якщо радіус сфери дорівнює $r$, то діаметр дорівнює $2r$.

**Центром**, **радіусом** і **діаметром кулі** називають центр, радіус і діаметр сфери, яка є поверхнею цієї кулі.

Можна довести, що *відстань від будь-якої точки кулі до її центра є не більшою за її радіус*.

У курсі планіметрії ви ознайомилися з випадками взаємного розміщення кола та прямої. Розглянемо взаємне розміщення сфери та площини.

Нехай радіус даної сфери дорівнює $r$, а відстань від центра $O$ сфери до даної площини $\alpha$ дорівнює $d$.

І випадок. Нехай $d > r$. У цьому випадку сфера та площина не мають спільних точок (рис. 21.3).

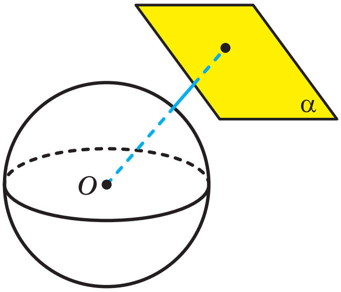



**Рис. 21.3**

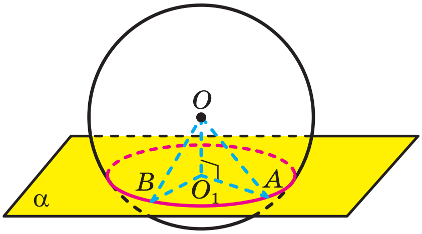



**Рис. 21.4**

II випадок. Нехай $d < r$. У цьому випадку *перерізом сфери площиною є коло* (рис. 21.4).

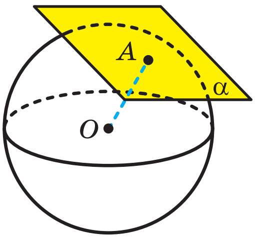



**Рис. 21.5**

Спираючись на це твердження, можна зробити такий висновок: якщо відстань від центра кулі до площини менша від радіуса кулі, то перерізом кулі площиною є круг.

Якщо площина проходить через центр кулі, то круг, утворений у перерізі, називають **великим кругом кулі**.

III випадок. Нехай $d = r$. У цьому випадку сфера та площина мають тільки одну спільну точку (рис. 21.5).

**Означення. Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери.**

Цю спільну точку називають **точкою дотику**. На рисунку 21.5 точка $A$ — точка дотику.

Має місце така теорема.

**Теорема 21.1.** ***Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.***

1. Що називають сферою? кулею?
2. Поясніть, яку точку називають центром кулі.

**3.** Що називають радіусом сфери? радіусом кулі?
**4.** Що називають діаметром сфери? діаметром кулі?
**5.** Чому дорівнює діаметр сфери, якщо її радіус дорівнює $r$?
**6.** Що є перерізом сфери площиною, якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери?
**7.** Що називають великим кругом кулі?
**8.** Яку площину називають дотичною площиною до сфери?
**9.** Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику площини та сфери?

## ВПРАВИ

**21.1.°** Наведіть приклади об'єктів навколишнього світу, предметів, уживаних у повсякденному житті, які мають форму сфери (кулі).

**21.2.°** Радіус кулі дорівнює $\sqrt{5}$ см. Чи належить кулі точка $A$, якщо вона віддалена від центра кулі:
1) на 2 см; 2) на 2,3 см?

**21.3.°** Точки $C$ і $D$ лежать на сфері із центром $O$, діаметр якої дорівнює 8 см. Знайдіть відрізок $CD$, якщо трикутник $COD$ є прямокутним.

**21.4.°** На сфері із центром $O$ позначили точки $A$ і $B$ такі, що $AB = 18$ см. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від точки $O$ до прямої $AB$ дорівнює 12 см.

**21.5.°** Дано сферу радіуса 6 см і площину $\alpha$. Якою має бути відстань від центра сфери до площини $\alpha$, щоб:
1) сфера та площина не мали спільних точок;
2) сфера та площина мали одну спільну точку;
3) перерізом сфери та площини було коло;
4) перерізом сфери та площини було коло найбільш можливої довжини?

**21.6.°** Діаметр сфери дорівнює 20 см, а відстань від її центра до площини $\alpha$ дорівнює 12 см. Чи мають дана сфера та площина $\alpha$ спільні точки?

**21.7.°** Скільки площин, що дотикаються до сфери, можна провести через точку:
1) яка належить цій сфері;
2) яка розміщена поза сферою?

**21.8.°** 1) Яка географічна паралель є найбільшим колом земної кулі?
2) Знайдіть довжину полярного круга Землі, прийнявши радіус Землі рівним 6400 км. Відповідь округліть до тисяч кілометрів.
3) Обчисліть шлях, який проходить за добу внаслідок обертання Землі навколо її осі населений пункт, у якому ви живете.

**21.9.°** Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу її великого круга.

**21.10.°** Доведіть, що коли площина $\alpha$ перетинає сферу із центром $O$ по колу із центром $O_1$, то $OO_1 \perp \alpha$.

**21.11.°** Сфера перетинається площиною, відстань від якої до центра сфери дорівнює 6 см. Довжина лінії перетину сфери з площиною дорівнює $16\pi$ см. Знайдіть радіус сфери.

**21.12.•** Перерізом кулі радіуса 13 см площиною є круг, площа якого дорівнює $25\pi$ см$^2$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

**21.13.•** Через кінець діаметра кулі радіуса $R$ проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут $\alpha$, $\alpha \neq 90°$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.

**21.14.•** Знайдіть довжину лінії перетину сфери з площиною, віддаленою від центра сфери на 2 см, якщо радіус сфери, проведений в одну з точок цієї лінії, утворює з даною площиною кут $30°$.

**21.15.•** Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 26 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 12 см і 16 см.

**21.16.•** На поверхні кулі позначено точки $A$, $B$ і $C$ такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини $ABC$, якщо радіус кулі дорівнює 17 см.

**21.17.•** Вершини трикутника зі сторонами 1 см, $\sqrt{3}$ см і 2 см лежать на сфері. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань від її центра до площини цього трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

**21.18.•** Дві кулі, радіуси яких дорівнюють 7 см і 9 см, мають спільний центр. Площина $\alpha$ дотикається до меншої кулі. Знайдіть площу перерізу більшої кулі площиною $\alpha$.

**21.19.••** Радіус сфери дорівнює 40 см. Точка $A$, яка належить площині, що дотикається до цієї сфери, віддалена від точки дотику на 9 см. Знайдіть відстань від точки $A$ до найближчої до неї точки сфери.

**21.20.••** Через точку $M$ сфери радіуса 112 см проведено дотичну площину. На цій площині позначено точку $K$, відстань від якої до найбільш віддаленої від неї точки сфери дорівнює 225 см. Знайдіть відстань між точками $M$ і $K$.

**21.21.*** Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду завдовжки 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площі даних перерізів дорівнюють $64\pi$ см$^2$ і $100\pi$ см$^2$.

**21.22.*** Перерізи кулі, площини яких перпендикулярні, мають спільну хорду. Відстань від центра кулі до площини одного з даних перерізів дорівнює 4 см, а до площини другого — 5 см. Знайдіть довжину спільної хорди цих перерізів, якщо радіус кулі дорівнює $5\sqrt{2}$ см.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**21.23.** Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з основами 6 см і 8 см та висотою 7 см.

**21.24.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 32 см, а радіус вписаного кола — 12 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

**21.25.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а кут між апофемами двох сусідніх граней дорівнює $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

## ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.

А) $32\pi$ см$^2$; Б) $64\pi$ см$^2$; В) $128\pi$ см$^2$; Г) $256\pi$ см$^2$.

**2.** Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи — 5 см. На відстані 4 см від осі циліндра паралельно їй проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу.

А) 40 см$^2$; Б) 24 см$^2$; В) 48 см$^2$; Г) 64 см$^2$.

**3.** Висота циліндра дорівнює 6 см, а площа його бічної поверхні — $24\pi$ см$^2$. Чому дорівнює площа основи циліндра?

А) $4\pi$ см$^2$; Б) 4 см$^2$; В) $3\pi$ см$^2$; Г) $6\pi$ см$^2$.

**4.** Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом $\alpha$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, нахилений до площини основи під кутом $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює $r$.

А) $2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; В) $2\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$;

Б) $2\pi r^2 \cos\alpha\operatorname{tg}\beta$; Г) $2\pi r^2 \sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

**5.** Кут між твірною та площиною основи конуса дорівнює $60°$, а висота конуса — $9\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює твірна конуса?

А) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см; Б) $18\sqrt{3}$ см; В) 13,5 см; Г) 18 см.

**6.** Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осьового перерізу — $120°$. Знайдіть висоту конуса.

А) $6\sqrt{3}$ см; Б) $8\sqrt{3}$ см; В) $12\sqrt{3}$ см; Г) $4\sqrt{3}$ см.

**7.** Обчисліть площу бічної поверхні конуса, діаметр основи якого дорівнює 12 см, а твірна — 17 см.

А) $102\pi$ см$^2$; Б) $204\pi$ см$^2$; В) $34\pi$ см$^2$; Г) $68\pi$ см$^2$.

**8.** Площа бічної поверхні конуса дорівнює $240\pi$ см$^2$. Чому дорівнює висота конуса, якщо радіус його основи дорівнює 12 см?

А) 12 см; Б) 16 см; В) 20 см; Г) 2 см.

**9.** Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $120°$. Знайдіть площу перерізу, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

А) 64 см$^2$; Б) $64\sqrt{3}$ см$^2$; В) 16 см$^2$; Г) $16\sqrt{3}$ см$^2$.

**10.** В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом $\alpha$, а з вершини конуса — під кутом $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює $r$.

А) $\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$; В) $\dfrac{\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

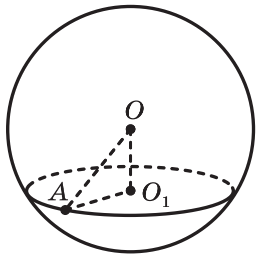
Б) $\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$; Г) $\dfrac{\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

**11.** Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а прилеглий до нього кут дорівнює $30°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, утвореного в результаті обертання цього трикутника навколо даного катета.

А) $24\pi\sqrt{3}$ см$^2$; Б) $12\pi\sqrt{3}$ см$^2$; В) $24\pi$ см$^2$; Г) $12\pi$ см$^2$.

**12.** У кулі із центром $O$, зображеній на рисунку, проведено переріз із центром $O_1$ на відстані 12 см від центра кулі. Знайдіть радіус кулі, якщо радіус перерізу дорівнює 9 см.

А) 10 см; В) 15 см;
Б) 12 см; Г) 21 см.




**13.** Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який утворює із цим радіусом кут $45°$. Знайдіть радіус кулі, якщо площа перерізу дорівнює $36\pi$ см$^2$.

А) $6\sqrt{2}$ см; В) $12\sqrt{2}$ см;
Б) 6 см; Г) 12 см.

**14.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $c$, а один із гострих кутів дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, утвореного в результаті обертання цього трикутника навколо катета, протилежного даному куту.

А) $\dfrac{\pi c^2}{\sin\alpha}$; Б) $\pi c^2 \sin\alpha$; В) $\pi c^2 \cos\alpha$; Г) $\dfrac{\pi c^2}{\cos\alpha}$.

**15.** Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює $45°$, проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота конуса дорівнює $h$ і утворює з його твірною кут $30°$.

А) $\dfrac{h^2\sqrt{6}}{6}$; Б) $\dfrac{h^2\sqrt{2}}{6}$; В) $\dfrac{2h^2\sqrt{2}}{3}$; Г) $\dfrac{h^2\sqrt{2}}{3}$.

**16.** Площина $\alpha$ дотикається до кулі із центром $O$ в точці $A$. Точка $B$ належить площині $\alpha$ і віддалена від центра кулі на 10 см. Знайдіть відрізок $AB$, якщо радіус кулі дорівнює 6 см.

А) 8 см; Б) 6 см; В) $2\sqrt{34}$ см; Г) 2 см.

**17.** Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює $4\pi\sqrt{5}$ см, а радіус основи циліндра — 2 см. Знайдіть висоту циліндра.

А) $9\pi$ см; Б) $8\pi$ см; В) 9 см; Г) 8 см.

**18.** Площа бічної поверхні першого циліндра дорівнює 28 см$^2$. Чому дорівнює площа бічної поверхні другого циліндра, якщо радіуси основ даних циліндрів рівні, а висота другого циліндра у 2 рази менша від висоти першого циліндра?

А) 14 см$^2$; Б) 7 см$^2$; В) 56 см$^2$; Г) установити неможливо.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

**Площа бічної поверхні циліндра**

За площу $S_б$ бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні.
$S_б = 2\pi rh$, де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, $r$ — радіус основи циліндра, $h$ — довжина висоти циліндра.

**Площа повної поверхні циліндра**

$S_п = S_б + 2S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра, $S_{осн}$ — площа основи циліндра.
$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2$

**Площа бічної поверхні конуса**

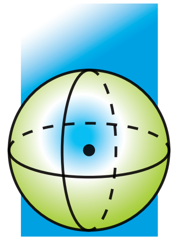
За площу $S_б$ бічної поверхні конуса приймають площу розгортки його бічної поверхні.
$S_б = \pi rl$, де $r$ — радіус основи конуса, $l$ — довжина твірної конуса.

**Площа повної поверхні конуса**

$S_п = S_б + S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні конуса, $S_{осн}$ — площа основи конуса.
$S_п = \pi rl + \pi r^2$

**Взаємне розміщення сфери та площини**

Якщо відстань від центра сфери до площини менша від радіуса сфери, то перерізом сфери площиною є коло.
Площину, яка має зі сферою тільки одну спільну точку, називають дотичною площиною до сфери. Цю спільну точку називають точкою дотику. У цьому випадку відстань від центра сфери до площини дорівнює радіусу сфери.
Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.



# §6 ОБ’ЄМИ ТІЛ. ПЛОЩА СФЕРИ

У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомим вам поняттям об’єму, вивчите нові формули для обчислення об’ємів многогранників і тіл обертання. Навчитеся знаходити площу сфери.

## 22. Об’єм тіла. Формули для обчислення об’єму призми та піраміди

З такою величиною, як об’єм, ви часто стикаєтесь у повсякденному житті: об’єм пакета соку, об’єм скляної банки, показники споживання води або палива на лічильниках (рис. 22.1). З поняттям об’єму ви ознайомились у курсі математики 5 класу. Крім того, це поняття ви неодноразово використовували, наприклад, на уроках фізики та хімії.


**Рис. 22.1**

Вивчаючи планіметрію, ви часто стикалися з такою геометричною величиною, як площа фігури. Об’єм тіла в стереометрії є аналогом площі фігури в планіметрії. Побачити цю аналогію нескладно, якщо порівняти означення площі многокутника, вивчене вами у 8 класі, з таким означенням.

**Означення. Об’ємом тіла називають додатну величину, яка має такі властивості:**

1) **рівні тіла мають рівні об’єми;**
2) **якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об’єм дорівнює сумі об’ємів цих тіл;**
3) **за одиницю виміру об’єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.**

Вивчення об’ємів тіл почнемо з многогранників.

Виміряти об’єм многогранника — це означає порівняти його об’єм з об’ємом одиничного куба. У результаті отримують числове значення об’єму даного многогранника. Це число показує, у скільки разів об’єм даного многогранника відрізняється від об’єму одиничного куба.

Покажемо, як, спираючись на означення, знайти об’єм, наприклад, прямокутного паралелепіпеда з ребрами 1 см, 1 см і 3 см (рис. 22.2).

Такий паралелепіпед можна розбити на три куби з ребром 1 см. Із властивості 2 об’єму випливає, що об’єм даного паралелепіпеда дорівнює трьом об’ємам куба з ребром 1 см (коротко записують: 3 см$^3$).

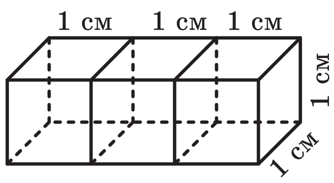



**Рис. 22.2**

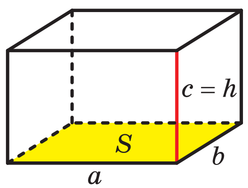



**Рис. 22.3**

Під час обчислення об’єму тіл зручно користуватися формулами, які дають змогу знаходити об’єм тіла за певними його елементами.

Зокрема, *якщо виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють $a$, $b$ і $c$, то його об’єм $V$ можна обчислити за формулою*

$$\boxed{V = abc}$$

Звернемо увагу, що добуток $ab$ дорівнює площі $S$ основи прямокутного паралелепіпеда, а ребро $c$ є його висотою $h$ (рис. 22.3). Тоді формулу об’єму прямокутного паралелепіпеда можна записати так:

$$\boxed{V = Sh}$$

Цю формулу використовують також для обчислення об’єму призми.

**Теорема 22.1.** ***Об’єм $V$ призми з висотою, що дорівнює $h$, і основою, площа якої дорівнює $S$, можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = Sh}$$

Знаходити об'єми тіл є складною задачею. Недарма формулу для обчислення об'єму піраміди, знайдену вченими Стародавньої Греції, вважають одним із найважливіших досягнень античної науки.

**Теорема 22.2.** ***Об'єм V піраміди з висотою, що дорівнює h, і основою, площа якої дорівнює S, можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

**Задача.** Основою чотирикутної піраміди $MABCD$ є прямокутник $ABCD$. Бічна грань $AMB$ перпендикулярна до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди, якщо $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $MA = MB = 13$ см.

*Розв'язання.* Проведемо висоту $MK$ трикутника $AMB$ (рис. 22.4). Оскільки $AMB \perp ABC$, то $MK \perp ABC$. Отже, відрізок $MK$ — висота даної піраміди.

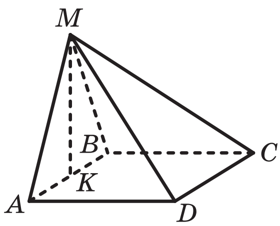


**Рис. 22.4**

Оскільки $MA = MB$, то відрізок $MK$ є медіаною трикутника $AMB$. Звідси $AK = KB = 5$ см.

Із прямокутного трикутника $MKA$ отримуємо:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (см)}.$$

Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 120 см$^2$.

Тепер можемо знайти об'єм $V$ піраміди:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 = 480 \text{ (см}^3\text{)}.$$

*Відповідь*: 480 см$^3$. ◄

1. Що називають об'ємом тіла?
2. Що означає виміряти об'єм многогранника?
3. За якими формулами обчислюють об'єм прямокутного паралелепіпеда?
4. За якою формулою обчислюють об'єм призми?
5. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?

## ВПРАВИ

**22.1.°** Чому дорівнює об'єм призми, площа основи якої дорівнює 12 см$^2$, а висота — 5 см?

**22.2.°** Знайдіть об'єм куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

**22.3.°** Як зміниться об'єм куба, якщо кожне його ребро збільшити в 3 рази?

**22.4.°** Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, кожне ребро якої дорівнює $a$.

**22.5.°** Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює $a$.

**22.6.°** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює $a$, а кут між діагоналлю призми та площиною основи дорівнює $\alpha$.

**22.7.°** Висота правильної трикутної призми дорівнює $h$, а діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть об'єм призми.

**22.8.°** Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 2, 3 і 6, а його діагональ дорівнює 14 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**22.9.°** Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см, 6 см і 9 см. Знайдіть ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму даного паралелепіпеда.

**22.10.°** Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої дорівнює 15 м, верхня основа — 8 м, а висота — 3,2 м. Скільки кубічних метрів землі знадобиться, щоб побудувати 1 км насипу?

**22.11.°** Цех, у якому працюватимуть $a$ робітників, має форму прямокутного паралелепіпеда. Щоби приміщення цеху відповідало санітарним нормам, на кожного робітника цеху повинно припадати $b$ м$^3$ повітря. Якою має бути в цьому разі висота $h$ цеху, якщо площа його підлоги становить $S$ м$^2$?

**22.12.°** Знайдіть місткість сараю з двоскатним дахом (рис. 22.5), якщо довжина сараю дорівнює 12 м, ширина — 8 м, висота стін — 3,5 м, а висота гребеня даху — 6 м (товщиною стін знехтувати).

**22.13.°** Знайдіть об'єм піраміди:
1) основою якої є квадрат зі стороною 2 см, а висота піраміди дорівнює 2 см;
2) основою якої є ромб з діагоналями 2 см і 3 см, а висота піраміди дорівнює 10 см;
3) основою якої є трикутник зі сторонами 6 см і 9 см та кутом 30° між ними, а висота піраміди дорівнює 12 см.

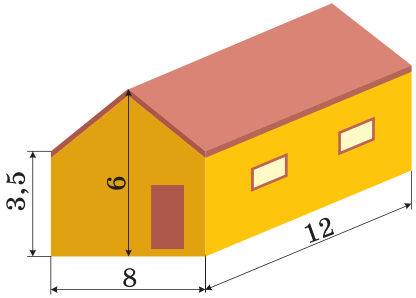



**Рис. 22.5**

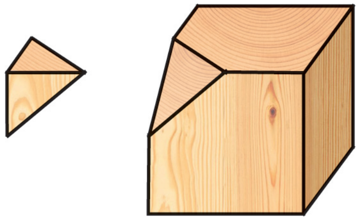


**Рис. 22.6**

**22.14.°** Знайдіть висоту піраміди, об'єм якої дорівнює 20 см$^3$, а площа основи — 15 см$^2$.

**22.15.°** Основою піраміди є прямокутник, сторони якого відносяться як 2 : 3, висота піраміди дорівнює 5 см, а об'єм — 90 см$^3$. Знайдіть периметр основи піраміди.

**22.16.°** Як зміниться об'єм піраміди, якщо кожну сторону її основи збільшити в 3 рази, а висоту — у 4 рази?

**22.17.°** Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 5 см, а бічне ребро — 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.18.°** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.19.°** Дерев'яний куб, ребро якого дорівнює 12 см, розпилили на дві частини: трикутну піраміду та семигранник (рис. 22.6). Знайдіть об'єм семигранника, якщо площина розпилу проходить через середини трьох ребер куба, які мають спільну вершину.

**22.20.°** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.21.•** Основа прямої призми — ромб зі стороною 8 см і кутом 60°. Менша діагональ призми дорівнює 17 см. Знайдіть об'єм призми.

**22.22.•** Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 30°. Кут між діагоналлю основи та однією з її сторін дорівнює 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**22.23.•** Основа прямої призми — рівнобічна трапеція з основами 5 см і 11 см та діагоналлю 10 см. Діагональ призми дорівнює 26 см. Знайдіть об'єм призми.

**22.24.**$^{\bullet}$ Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 3 см і 8 см та кутом $30^\circ$. Бічне ребро призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут $45^\circ$. Знайдіть об'єм призми.

**22.25.**$^{\bullet}$ Основою похилої призми є трикутник зі сторонами $4\sqrt{3}$ см і 5 см та кутом $120^\circ$ між ними. Бічне ребро призми дорівнює 20 см і утворює з висотою призми кут $60^\circ$. Знайдіть об'єм призми.

**22.26.**$^{\bullet}$ Об'єм прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, зображеної на рисунку 22.7, дорівнює $V$. Точка $D$ — середина ребра $AA_1$. Знайдіть об'єм піраміди $DABC$.

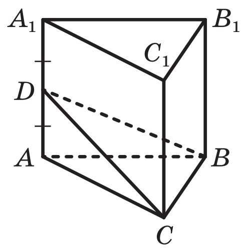



**Рис. 22.7**

**22.27.**$^{\bullet}$ Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює $b$ і утворює з висотою піраміди кут $\alpha$.

**22.28.**$^{\bullet}$ Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює $a$.

**22.29.**$^{\bullet}$ Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює $b$ і утворює з площиною основи кут $\alpha$.

**22.30.**$^{\bullet\bullet}$ Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює $d$ і утворює з площиною бічної грані кут $\alpha$. Знайдіть об'єм призми.

**22.31.**$^{\bullet\bullet}$ Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює $d$ і утворює з площиною основи кут $\alpha$, а з площиною бічної грані — кут $\beta$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

**22.32.**$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, якщо її діагоналі $A_1D$ і $A_1E$ дорівнюють відповідно 13 см і 12 см.

**22.33.**$^{\bullet\bullet}$ Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$. Відомо, що $\angle BAD = \alpha$, $AC = d$. Через пряму $BD$ і точку $C_1$ проведено площину, яка утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об'єм призми.

**22.34.**$^{\bullet\bullet}$ Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник $ABC$. Відомо, що $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = \beta$, $AB = c$. Площина $A_1BC$ утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть об'єм призми.

**22.35.**$^{\bullet\bullet}$ Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівносторонній трикутник $ABC$ зі стороною $a$. Вершина $A_1$ призми рівновіддалена від вершин трикутника $ABC$, а кут між ребром $AA_1$ і площиною основи дорівнює $\alpha$. Знайдіть об'єм призми.

**22.36.**•• Основою похилої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $a$, бічне ребро призми дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Вершина $A_1$ призми рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$. Знайдіть об'єм призми.

**22.37.**•• Основою піраміди є трикутник зі сторонами $3\sqrt{10}$ см, $3\sqrt{10}$ см і 6 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.38.**•• Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 24 см і 18 см, а кожне її бічне ребро дорівнює 25 см. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.39.**•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом $a$ і прилеглим до нього кутом $\alpha$. Кожне бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.40.**•• Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $b$. Кут між бічними сторонами основи піраміди дорівнює $\beta$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною її основи кут $\alpha$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.41.**•• Основою піраміди є ромб зі стороною $a$ та кутом $\alpha$. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $\beta$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.42.**•• Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 4 см і 10 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $45°$, а висота піраміди дорівнює $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.43.**•• Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $60°$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.44.**•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною $a$. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом $60°$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.45.**•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною $a$. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.

**22.46.**•• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$. Бічна грань $AMB$ перпендикулярна до площини основи, $MA = MB$, відстань від точки $M$ до прямої $CD$ дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 8 см.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**22.47.** Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — $60^\circ$. Знайдіть площу паралелограма.

**22.48.** Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 9 см і 15 см, а більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

**22.49.** Дано вектори $\vec{m}(3; -2; p)$ і $\vec{n}(-9; 6; -12)$.

1) При якому значенні $p$ вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ є колінеарними?

2) При якому значенні $p$ вектор $\vec{m}$ буде перпендикулярним до осі $z$?

# 23. Об'єми тіл обертання. Площа сфери

На рисунку 23.1 зображено 6-кутну, 12-кутну та 24-кутну правильні призми, площа основи кожної з яких дорівнює $S$, а висота — $h$. Тоді об'єм кожної із цих призм дорівнює $Sh$.

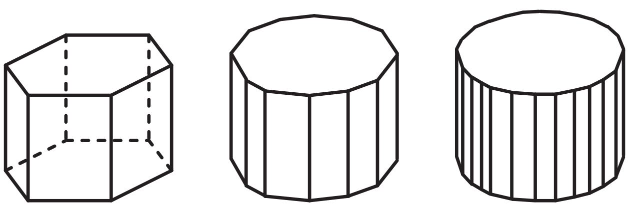


**Рис. 23.1**

Звернемо увагу, що чим більшу кількість сторін має основа призми, тим більше ця призма схожа на циліндр. Ці міркування підказують, що має місце така теорема.

**Теорема 23.1.** ***Об'єм циліндра $V$ з площею основи $S$ і висотою $h$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = Sh}$$

Якщо радіус основи циліндра дорівнює $r$, то дану формулу можна записати у вигляді

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

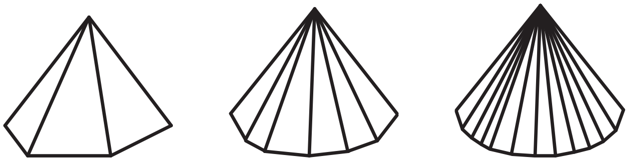


**Рис. 23.2**

На рисунку 23.2 зображено 6-кутну, 12-кутну та 24-кутну правильні піраміди, площа основи кожної з яких дорівнює $S$, а висота — $h$. Тоді об'єм кожної із цих пірамід дорівнює $\frac{1}{3}Sh$.

Звернемо увагу, що чим більшу кількість сторін має основа піраміди, тим більше ця піраміда схожа на конус. Ці міркування підказують, що має місце така теорема.

**Теорема 23.2.** ***Об'єм конуса V з площею основи S і висотою h можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Якщо радіус основи конуса дорівнює $r$, то дану формулу можна записати у вигляді

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

На відміну від циліндра та конуса, кулю неможливо «наблизити» правильними многогранниками, тому об'єм кулі визначають в інший спосіб. Формули для обчислення об'єму кулі та площі сфери вперше отримав геніальний давньогрецький математик Архімед.

**Теорема 23.3.** ***Об'єм V кулі радіуса R можна обчислити за формулою***

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3,}$$

***а площу S сфери радіуса R можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

**Задача.** Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює $l$ і нахилена до площини основи під кутом $\varphi$.

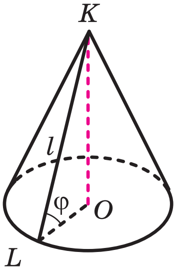



**Рис. 23.3**

*Розв'язання.* На рисунку 23.3 зображено конус, твірна $KL$ якого дорівнює $l$ і нахилена до площини основи під кутом $\varphi$. Нехай $O$ — центр основи конуса. Із прямокутного трикутника $KLO$ знайдемо радіус основи $r$ і висоту конуса $h$. Маємо:

$$r = l \cos \varphi,$$
$$h = l \sin \varphi.$$

Використовуючи формулу $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, знаходимо об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

*Відповідь*: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi$. ◄

1. За якими формулами обчислюють об'єм циліндра?
2. За якими формулами обчислюють об'єм конуса?
3. За якою формулою обчислюють об'єм кулі?
4. За якою формулою обчислюють площу сфери?

## ВПРАВИ

**23.1.°** Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота — 5 см.

**23.2.°** Знайдіть висоту циліндра, об'єм якого дорівнює $98\pi$ см$^3$, а радіус основи — 7 см.

**23.3.°** Знайдіть радіус основи циліндра, об'єм якого дорівнює $252\pi$ см$^3$, а висота — 7 см.

**23.4.°** Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутника зі сторонами $a$ і $b$ навколо прямої, яка містить його сторону, що дорівнює $b$.

**23.5.°** Висота циліндра дорівнює $H$, а осьовий переріз циліндра є квадратом. Знайдіть об'єм циліндра.

**23.6.°** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм циліндра.

**23.7.**° У циліндричну посудину, наповнену водою, занурили металеву деталь. При цьому виявилося, що деталь повністю покрито водою. Рівень води в посудині піднявся на 14 см, не досягнувши краю посудини. Знайдіть об'єм деталі, якщо внутрішній діаметр посудини дорівнює 20 см.

**23.8.**° Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота — 5 см.

**23.9.**° Знайдіть висоту конуса, об'єм якого дорівнює $24\pi$ см$^3$, а радіус основи — 3 см.

**23.10.**° Об'єм конуса дорівнює $50\pi$ см$^3$, а його висота — 6 см. Знайдіть радіус основи конуса.

**23.11.**° Куча щебінки має форму конуса, радіус основи якого 2,1 м, а твірна — 3,5 м. Скільки тонн становить маса щебінки, зібраної в цю кучу, якщо маса 1 м$^3$ щебінки дорівнює 3 т? Відповідь округліть до одиниць.

**23.12.**° Осьовий переріз конуса є рівностороннім трикутником, а радіус основи конуса дорівнює $R$. Знайдіть об'єм конуса.

**23.13.**° Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 4 см, а кут між твірною та площиною основи дорівнює 30°.

**23.14.**° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один із кутів — 60°. Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання даного трикутника навколо прямої, яка містить катет, прилеглий до даного кута.

**23.15.**° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один із катетів — 5 см. Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання цього трикутника навколо прямої, яка містить даний катет.

**23.16.**° Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює 3 см.

**23.17.**° Доведіть, що об'єми двох куль відносяться як куби їхніх радіусів.

**23.18.**° У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився в 5 разів?

**23.19.**° Об'єми двох куль відносяться як 8 : 125. Знайдіть відношення їхніх радіусів.

**23.20.**° Радіус сфери дорівнює 5 см. Чому дорівнює її площа?

**23.21.**° Знайдіть радіус сфери, площа якої дорівнює $256\pi$ см$^2$.

**23.22.**° Радіус кулі збільшили в 7 разів. Як при цьому змінилася площа її поверхні?

**23.23.°** Як треба змінити радіус кулі, щоби площа її поверхні зменшилася в 3 рази?

**23.24.°** Об’єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

**23.25.•** Алюмінієвий дріт діаметром 10 мм має масу 16,3 кг. Густина алюмінію дорівнює 2600 кг/м$^3$. Скільки метрів становить довжина дроту? Відповідь округліть до одиниць.

**23.26.•** Свинцева труба, товщина стінки якої дорівнює 4 мм, має внутрішній діаметр 32 мм. Густина свинцю дорівнює 11 400 кг/м$^3$. Скільки кілограмів становить маса труби, якщо її довжина дорівнює 15 м? Відповідь округліть до одиниць.

**23.27.•** У нижній основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$, $0° < \alpha < 180°$. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть об’єм циліндра, якщо його висота дорівнює $m$.

**23.28.•** У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом 90°, а із центра верхньої основи — під кутом 60°. Знайдіть об’єм циліндра, якщо радіус його основи дорівнює $R$.

**23.29.•** Кут в осьовому перерізі конуса при його вершині дорівнює $\alpha$, а відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює $m$. Знайдіть об’єм конуса.

**23.30.•** В основі конуса хорда завдовжки $a$ стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$, $0° < \alpha < 180°$. Кут між твірною конуса та площиною його основи дорівнює $\beta$. Знайдіть об’єм конуса.

**23.31.•** Хорда основи конуса стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 60°. Відрізок, що сполучає вершину конуса із серединою даної хорди, утворює з площиною основи конуса кут 60°. Висота конуса дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть об’єм конуса.

**23.32.•** Із посудини, що має форму конуса з висотою 8 см і діаметром основи 12 см, наповненої до країв водою, перелили воду в посудину, що має форму циліндра (рис. 23.4). Діаметр основи циліндра дорівнює 8 см. Якою має бути найменша висота циліндричної посудини, щоб вода з неї не виливалася?

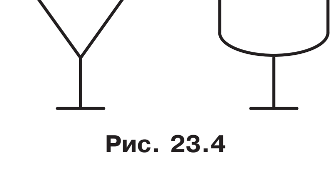


**Рис. 23.4**

**23.33.**$^{\bullet}$ Стіг сіна має форму циліндра з конічною верхівкою. Радіус його основи дорівнює 2,5 м, висота всього стогу — 4 м, а висота його циліндричної частини — 2,2 м. Густина сіна дорівнює 30 кг/м$^3$. Скільки тонн становить маса стогу? Відповідь округліть до десятих.

**23.34.**$^{\bullet}$ Металеву кулю радіуса 15 см розплавили та з отриманого металу відлили кілька куль, радіуси яких дорівнюють 3 см. Скільки відлили таких куль? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

**23.35.**$^{\bullet}$ Три металеві кулі, радіуси яких дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, розплавили та з отриманого металу відлили одну кулю. Який радіус отриманої кулі? Втратами металу під час переплавки знехтувати.

**23.36.**$^{\bullet}$ Площа великого круга кулі дорівнює $S$. Знайдіть площу поверхні даної кулі.

**23.37.**$^{\bullet}$ Площина, віддалена від центра сфери на 7 см, перетинає сферу по лінії, довжина якої дорівнює $6\pi$ см. Знайдіть площу сфери.

**23.38.**$^{\bullet}$ Площа перерізу кулі площиною, віддаленою від її центра на 4 см, дорівнює $24\pi$ см$^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.

**23.39.**$^{\bullet}$ Скільки метрів тканини завширшки 1 м знадобиться для виготовлення повітряної кулі, радіус якої дорівнює 2 м, якщо на з'єднання деталей кулі та відходи йде 10 % тканини? Відповідь округліть до десятих.

**23.40.**$^{\bullet}$ У якому випадку витрачається більше сировини: для нікелювання однієї кулі діаметром 6 см або для нікелювання 8 куль діаметром 1 см кожна?

**23.41.**$^{\bullet\bullet}$ Паралельно осі циліндра проведено переріз, відстань від площини якого до осі циліндра дорівнює 12 см. Діагональ перерізу дорівнює $10\sqrt{5}$ см, а радіус основи циліндра — 13 см. Знайдіть об'єм циліндра.

**23.42.**$^{\bullet\bullet}$ Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$, $0^\circ < \alpha < 80^\circ$. Діагональ отриманого перерізу утворює з віссю циліндра кут $\beta$ і віддалена від неї на відстань $d$. Знайдіть об'єм циліндра.

**23.43.**$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання трикутника зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см навколо прямої, яка містить його більшу сторону.

**23.44.**•• Рівнобічну трапецію з основами 1 см і 25 см обертають навколо прямої, що містить її більшу основу. Знайдіть об'єм отриманого тіла, якщо відомо, що в дану трапецію можна вписати коло.

**23.45.**•• Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання прямокутного трикутника навколо прямої, що містить гіпотенузу цього трикутника, якщо відомо його катет $a$ і прилеглий до цього катета кут $\beta$.

**23.46.**•• Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по один бік від її центра, дорівнюють $400\pi$ см$^2$ і $49\pi$ см$^2$. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 9 см.

**23.47.**•• Площі двох паралельних перерізів кулі, розміщених по різні боки від її центра, дорівнюють $9\pi$ см$^2$ і $25\pi$ см$^2$. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо відстань між площинами перерізів дорівнює 8 см.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**23.48.** У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Кут $A$ в 3 рази більший за кут $C$, а кут $B$ у 5 разів менший від кута $A$. Знайдіть кут $D$.

**23.49.** У рівнобедреному трикутнику $MKE$ ($MK = KE$) бісектриса кута $E$ перетинає сторону $MK$ у точці $C$. Знайдіть кути трикутника $MKE$, якщо $\angle KCE = 126°$.

**23.50.** Модуль вектора $\vec{a}(2; m+1; m+5)$ дорівнює $2\sqrt{3}$. Чи є вектор $\vec{a}$ колінеарним вектору $\vec{b}(-1; m+4; m+2)$?

## ЗАВДАННЯ № 6 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Ребро куба зменшили в 3 рази. У скільки разів зменшився його об'єм?

А) У 3 рази; Б) у 6 разів; В) у 9 разів; Г) у 27 разів.

**2.** Діагональ грані куба дорівнює $a$. Чому дорівнює об'єм куба?

А) $\frac{a^3}{8}$; Б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; В) $\frac{a^3}{9}$; Г) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

**3.** Обчисліть об'єм правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 20 см, а висота — 9 см.

А) $300\sqrt{3}$ см$^3$; Б) 300 см$^3$; В) 900 см$^3$; Г) $900\sqrt{3}$ см$^3$.

**4.** Обчисліть об'єм призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 6 см і 4 см та кутом 45°, а висота призми дорівнює $7\sqrt{2}$ см.

А) 168 см$^3$; Б) 84 см$^3$; В) 56 см$^3$; Г) 70 см$^3$.

**5.** Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою $c$ і кутом 30°. Діагональ бічної грані, яка містить катет, протилежний даному куту, нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм призми.

А) $\frac{3c^3}{16}$; Б) $\frac{3c^3}{8}$; В) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{16}$; Г) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{8}$.

**6.** Обчисліть об'єм піраміди, основою якої є ромб з діагоналями 10 см і 18 см, а висота піраміди дорівнює 20 см.

А) 1800 см$^3$; Б) 600 см$^3$; В) 1200 см$^3$; Г) 300 см$^3$.

**7.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а її діагональний переріз — рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм піраміди.

А) $\frac{a^3}{3}$; Б) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; В) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; Г) $\frac{a^3}{6}$.

**8.** Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

А) $240\sqrt{3}$ см$^3$; Б) 160 см$^3$; В) 80 см$^3$; Г) $80\sqrt{3}$ см$^3$.

**9.** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 39 см, 39 см і 30 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

А) 900 см$^3$; Б) 600 см$^3$; В) 1800 см$^3$; Г) 1200 см$^3$.

**10.** Обчисліть об'єм циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 8 см.

А) $64\pi$ см$^3$; Б) $96\pi$ см$^3$; В) $128\pi$ см$^3$; Г) $512\pi$ см$^3$.

**11.** Чому дорівнює радіус основи циліндра, об'єм якого становить $36\pi$ см$^3$, а висота дорівнює 4 см?

А) 9 см; Б) 3 см; В) 6 см; Г) $2\sqrt{3}$ см.

**12.** Висота конуса дорівнює 9 см, а його об'єм — $6\pi$ см$^3$. Чому дорівнює площа основи конуса?

А) 2 см$^2$; Б) $2\pi$ см$^2$; В) $3\pi$ см$^2$; Г) 6 см$^2$.

**13.** Радіуси основ циліндра й конуса є рівними, висота циліндра дорівнює 8 см, а висота конуса — 6 см. Знайдіть відношення об'єму циліндра до об'єму конуса.

А) 4 : 3; Б) 1 : 1; В) 4 : 1; Г) 3 : 1.

**14.** Площа повної поверхні конуса дорівнює $200\pi$ см$^2$, а його твірна — 17 см. Знайдіть об'єм конуса.

А) $960\pi$ см$^3$; Б) $320\pi$ см$^3$; В) $480\pi$ см$^3$; Г) $120\pi$ см$^3$.

**15.** В основі конуса проведено хорду завдовжки 12 см, яку видно із центра основи під кутом 120°. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 8 см.

А) $64\pi\sqrt{3}$ см$^3$; Б) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$; В) $192\pi$ см$^3$; Г) $64\pi$ см$^3$.

**16.** Обчисліть об'єм кулі радіуса 3 см.

А) $36\pi$ см$^3$; Б) $9\pi$ см$^3$; В) $108\pi$ см$^3$; Г) $54\pi$ см$^3$.

**17.** Знайдіть відношення площ двох сфер, радіуси яких дорівнюють 5 см і 10 см.

А) 1 : 5; Б) 1 : 2; В) 1 : 8; Г) 1 : 4.

**18.** Чому дорівнює радіус сфери, площа якої становить $100\pi$ см$^2$?

А) 100 см; Б) 50 см; В) 5 см; Г) 20 см.

## ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 6

**Об'єм тіла**

Об'ємом тіла називають додатну величину, яка має такі властивості:
1) рівні тіла мають рівні об'єми;
2) якщо тіло складене з кількох інших тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;
3) за одиницю виміру об'єму тіла беруть одиничний куб, тобто куб з ребром, яке дорівнює одиниці виміру довжини.

**Об'єм призми**

$V = Sh$, де $V$ — об'єм призми, $S$ — площа основи призми, $h$ — довжина висоти призми.

**Об'єм піраміди**

$V = \frac{1}{3}Sh$, де $V$ — об'єм піраміди, $S$ — площа основи піраміди, $h$ — довжина висоти піраміди.

**Об'єм циліндра**

$V = \pi r^2 h$, де $V$ — об'єм циліндра, $r$ — радіус основи циліндра, $h$ — довжина висоти циліндра.

**Об'єм конуса**

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, де $V$ — об'єм конуса, $r$ — радіус основи конуса, $h$ — довжина висоти конуса.

**Об'єм кулі**

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де $V$ — об'єм кулі, $R$ — радіус кулі.

**Площа сфери**

$S = 4\pi R^2$, де $S$ — площа сфери, $R$ — радіус сфери.

# §7 ПОВТОРЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ

## 24. Задачі для повторення курсу алгебри

### Подільність натуральних чисел. Ознаки подільності

**24.1.** Які із чисел 24, 75, 83, 378, 573, 898 діляться націло: 1) на 2; 2) на 3?

**24.2.** Які із чисел 28, 85, 108, 135, 240, 396 діляться націло: 1) на 5; 2) на 9?

**24.3.** Знайдіть найбільший спільний дільник чисел: 1) 24 і 42; 2) 18 і 30; 3) 128 і 192; 4) 328 і 624.

**24.4.** Знайдіть найменше спільне кратне чисел: 1) 16 і 32; 2) 9 і 14; 3) 18 і 12; 4) 16 і 24.

**24.5.** Замість зірочки в записі 400* поставте цифру так, щоб отримане число було кратним: 1) 2; 2) 5; 3) 9; 4) 3. Розгляньте всі можливі випадки.

**24.6.** Неповна частка при діленні двох двоцифрових чисел дорівнює 9, а остача — 8. Чому дорівнює ділене?

**24.7.** Марія живе у квартирі № 40 п'ятиповерхового будинку. У кожному під'їзді на кожному поверсі розташовано по 3 квартири в порядку зростання номерів: перша — ліворуч, друга — посередині, а третя — праворуч.
1) Який номер під'їзду, у якому живе Марія?
2) На якому поверсі живе дівчина?
3) Де розташована її квартира: ліворуч, посередині або праворуч?

**24.8.** Яке число є дільником будь-якого натурального числа?

**24.9.** Яке із чисел 4025, 7540, 2754, 6225 ділиться націло на 3, але не ділиться націло на 2?

**24.10.** Скільки існує двоцифрових чисел, кратних числу: 1) 5; 2) 9; 3) 7?

**24.11.** Книги можна розставити порівну на 12 полицях або на 8 полицях. Скільки є книг, якщо відомо, що їх більше за 100, але менше від 140?

**24.12.** Яблука можна розкласти порівну у 12 пакетів або, також порівну, у 16 пакетів. Скільки є яблук, якщо відомо, що їх більше за 80, але менше від 120?

**24.13.** Яке найменше натуральне число треба додати до числа 826, щоб отримана сума ділилася націло одночасно на 3 і на 10?

**24.14.** У саду ростуть яблуні та вишні, причому яблунь у 3 рази більше, ніж вишень. Якому з наведених чисел може дорівнювати загальна кількість дерев у саду?

1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.

**24.15.** Чому дорівнює остача при діленні на 7 значення виразу $(5n+8)-(5-2n)$, де $n$ — будь-яке натуральне число?

**24.16.** У кожному букеті має бути 3 червоні та 4 білі троянди. Яку найбільшу кількість таких букетів можна скласти з 36 червоних і 45 білих троянд?

**24.17.** Яку одну й ту саму цифру треба поставити в записі **25** замість кожної зірочки, щоб отримане число було кратним 6?

## Раціональні числа та дії над ними

**24.18.** Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{15}$; 2) $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{5}{12}$.

**24.19.** Знайдіть усі натуральні значення $c$, при яких є правильною нерівність:

1) $\frac{6}{11}<\frac{c}{11}<1$; 2) $\frac{2}{9}<\frac{c}{18}<\frac{5}{6}$.

**24.20.** Знайдіть усі натуральні значення $x$, при яких є правильною нерівність $\frac{x}{9}<\frac{22}{45}$.

**24.21.** Скільки існує дробів:

1) зі знаменником 24, які більші за $\frac{3}{8}$, але менші від $\frac{2}{3}$;

2) зі знаменником 18, які більші за $\frac{7}{9}$, але менші від 1;

3) зі знаменником 28, які більші за $\frac{3}{7}$, але менші від $\frac{4}{7}$?

**24.22.** Відстань між двома містами легковий автомобіль проїжджає за 5 год, а вантажний — за 8 год. Який автомобіль проїде більшу відстань: легковий за 3 год або вантажний за 5 год?

**24.23.** Скільки існує правильних дробів зі знаменником 12?

**24.24.** Скільки існує неправильних дробів із чисельником 10?

**24.25.** Якому з даних проміжків належить число $\frac{10}{15}$:

1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

**24.26.** Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{9}{11}-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{16}+\frac{7}{24}-\frac{5}{8}$; 7) $4\frac{7}{30}-1\frac{11}{20}$;

2) $\frac{11}{16}-\frac{9}{32}$; 5) $2\frac{3}{4}+6\frac{7}{10}$; 8) $\frac{5}{7}-0{,}6$;

3) $\frac{14}{15}-\frac{9}{10}$; 6) $5\frac{2}{9}-2\frac{5}{7}$; 9) $0{,}35+\frac{8}{15}$.

**24.27.** Обчисліть значення виразу:

1) $1\frac{3}{25}\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{170}$; 4) $(-5{,}16+5{,}02)\cdot(2{,}5-4)$;

2) $\left(9-2\frac{1}{7}\cdot 3\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{27}{35}$; 5) $\frac{5}{32}:\frac{5}{12}-3\frac{1}{4}:1\frac{2}{11}$;

3) $\left(5\frac{1}{16}-1\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{14}\right)$; 6) $\left(7-1\frac{5}{9}:\frac{7}{24}\right):\left(-\frac{25}{36}\right)$.

**24.28.** Який із даних десяткових дробів не можна перетворити у скінченний десятковий дріб:

1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

**24.29.** Один тракторист може зорати поле за 12 год, а другий — за 8 год. Яку частину поля зможуть вони зорати, працюючи разом, за 3 год?

**24.30.** У магазин завезли 540 кг фруктів, із них $\frac{4}{9}$ становили яблука, а решту — груші. Скільки кілограмів груш завезли в магазин?

**24.31.** За три дні встановили антивірусні програми на 105 комп'ютерах. За перший день установили програми на $\frac{3}{7}$ комп'ютерів, а за другий — на $\frac{7}{12}$ решти. На скількох комп'ютерах установили програми за третій день?

**24.32.** Потрібно розфасувати $27\frac{1}{2}$ кг цукру в пакети по $\frac{3}{4}$ кг кожний. Скільки отримають повних пакетів?

**24.33.** Яка найменша кількість банок місткістю 0,3 л потрібна, щоб розлити в них 4 л меду?

**24.34.** Один маляр може відремонтувати кабінет математики за 48 год, а другий маляр — за 96 год. За скільки годин, працюючи разом, вони відремонтують цей кабінет?

**24.35.** Двоє робітників, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 6 год. Один із них, працюючи самостійно, може виконати цю роботу за 10 год. За скільки годин її може виконати самостійно другий робітник?

### Пропорційні величини. Відсоткові розрахунки

**24.36.** У дівчинки є деяка сума грошей, за яку вона може придбати 18 однакових зошитів. Скільки зошитів дівчинка зможе придбати за цю суму грошей, якщо вони: 1) подешевшають у 2 рази; 2) подорожчають в 1,5 раза?

**24.37.** Із 12 м батисту пошили 8 однакових блузок. Скільки таких блузок можна пошити з 18 м батисту?

**24.38.** Шість однакових екскаваторів, працюючи разом, викопали котлован за 18 год. За скільки годин 4 таких екскаватори, працюючи разом, викопають два таких котловани?

**24.39.** Відомо, що з 50 кг борошна отримують 70 кг хліба. Скільки кілограмів хліба отримають зі 150 кг борошна? Скільки потрібно кілограмів борошна, щоб спекти 14 кг хліба?

**24.40.** Огірками засадили $\frac{1}{3}$ городу, а помідорами — $30\ \%$. Якими рослинами, огірками чи помідорами, засадили більшу площу?

**24.41.** Із куплених зошитів $20\ \%$ були в клітинку, а решта — у лінійку. У скільки разів більше купили зошитів у лінійку, ніж у клітинку?

**24.42.** Сплав містить $9\ \%$ цинку. Скільки кілограмів цинку міститься у 270 кг сплаву?

**24.43.** Ціну товару спочатку збільшили на $50\ \%$, а потім зменшили на $50\ \%$. Збільшилася чи зменшилася та на скільки відсотків початкова ціна товару?

**24.44.** Ціну товару спочатку знизили на $20\ \%$, а потім підвищили на $30\ \%$. Як і на скільки відсотків змінилася початкова ціна внаслідок цих двох переоцінок?

**24.45.** Вкладник поклав у банк 60 000 грн на два різних рахунки. За першим із них банк виплачує $5\ \%$ річних, а за другим — $7\ \%$ річних. Через рік вкладник отримав прибутку за 5-відсотковим вкладом на 1200 грн більше, ніж за 7-відсотковим. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

**24.46.** Змішали 50-відсотковий і 20-відсотковий розчини кислоти й отримали 600 г 30-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

**24.47.** Скільки кілограмів 30-відсоткового та скільки кілограмів 40-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 50 кг 36-відсоткового сплаву?

**24.48.** За перший день турист пройшов 16 км, що становить 40 % довжини туристичного маршруту. Знайдіть довжину цього маршруту.

**24.49.** Руда містить 70 % заліза. Скільки треба взяти руди, щоб отримати 84 т заліза?

**24.50.** У кінозалі 480 місць, з яких під час сеансу було зайнято 408. Скільки відсотків місць було зайнято?

**24.51.** До 200 г 10-відсоткового розчину солі долили 300 г води. Який відсотковий вміст солі в отриманому розчині?

**24.52.** Ціна товару зросла з 1600 грн до 1640 грн. На скільки відсотків зросла ціна товару?

**24.53.** Ціна товару знизилася з 3200 грн до 2560 грн. На скільки відсотків знизилася ціна?

**24.54.** Вкладник поклав на рахунок у банку 60 000 грн під 10 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через 2 роки?

## Раціональні вирази

**24.55.** При деяких значеннях $x_1$ і $x_2$ виконуються рівності $x_1 - x_2 = 7$, $x_1x_2 = 4$. Знайдіть при цих самих значеннях $x_1$ і $x_2$ значення виразу:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$;  2) $x_1^2 + x_2^2$;  3) $(x_1 + x_2)^2$.

**24.56.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3a}{12b}$; 2) $\frac{8xy}{4xz}$; 3) $\frac{20m^2}{15m^3}$; 4) $\frac{3a^2bc}{21abc^4}$; 5) $\frac{36m^5n^4}{24m^2n^7}$; 6) $\frac{39p^6q^9}{65p^9q^6}$.

**24.57.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a+12b}{4a}$;
2) $\frac{7x-14y}{3x-6y}$;
3) $\frac{x^2-25}{2x+10}$;
4) $\frac{6y^2-3y}{4-8y}$;
5) $\frac{4p^2+28pq+49q^2}{49q^2-4p^2}$;
6) $\frac{a^3-27}{9a-27}$;
7) $\frac{7a^2+7a+7}{14a^3-14}$;
8) $\frac{x^2-7x}{x^2-9x+14}$;
9) $\frac{x^2-64}{32+4x-x^2}$.

**24.58.** Спростіть вираз:

1) $\frac{2a+5b}{ab}-\frac{2a-b}{ab}$;

2) $\frac{x^2+8x}{4-x^2}-\frac{4x-4}{4-x^2}$;

3) $\frac{5x+6}{5-x}+\frac{3x+16}{x-5}$;

4) $\frac{36-10x}{(x-6)^2}-\frac{2x-x^2}{(6-x)^2}$.

**24.59.** Спростіть вираз:

1) $\frac{4n+5m}{m}-\frac{6n^2+5m^2}{mn}$;

2) $\frac{a+2}{3a-3}+\frac{3-a}{5a-5}$;

3) $\frac{x-5}{x+5}-\frac{x-1}{x-5}$;

4) $\frac{4b}{3b-24}+\frac{3b}{16-2b}$;

5) $\frac{4}{m^2-36}-\frac{2}{m^2-6m}$;

6) $8-\frac{3a+8c}{c}$;

7) $\frac{m+1}{m-1}-\frac{m^2+1}{m^2-1}$;

8) $\frac{b^2}{2ab+a^2+b^2}+\frac{a-b}{a+b}$;

9) $\frac{3a}{9a^2-1}-\frac{a+2}{3a^2+a}$.

**24.60.** Виконайте множення:

1) $\frac{a^3}{b^4}\cdot\frac{b^2}{a^3}$;

2) $\frac{4m^2}{k^6}\cdot\frac{mk^6}{16}$;

3) $\frac{a}{7b}\cdot 7a$;

4) $20x^{16}\cdot\frac{y^4}{5x^4}$;

5) $\frac{17x^4}{y^8}\cdot\frac{y^6}{34x^7}$;

6) $\frac{8k^9}{9mp}\cdot\frac{81m^2}{56k^6p^2}$.

**24.61.** Знайдіть частку:

1) $\frac{14}{a^2}:\frac{28}{a^6}$;

2) $\frac{b^5}{6}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{45}{m^8}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^7}{y^8}:(36x^7y^2)$;

5) $35m^4:\frac{21m^3}{n^2}$;

6) $\frac{16a^3b^8}{33c^5}:\left(-\frac{12a^2}{55c^6}\right)$.

**24.62.** Спростіть вираз:

1) $\frac{4x+4y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x+y}$;

2) $\frac{24b}{b^2-16}\cdot\frac{b-4}{3b}$;

3) $\frac{8}{m^2-25n^2}\cdot(m-5n)$;

4) $\frac{3c+6}{9c^2-6c+1}\cdot\frac{3c-1}{c+2}$;

5) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

6) $(p^2-36k^2):\frac{p+6k}{p}$.

**24.63.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m}{m-2}-1\right):\frac{6m}{mn-2n}$;

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a+b}{2ab}$;

3) $\frac{6x}{x+2}-\frac{x-6}{3x+6}\cdot\frac{72}{x^2-6x}$;
5) $\left(\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m+1}\right):\frac{4m}{1-m^2}$;
4) $\left(a-\frac{15a-25}{a+5}\right):\frac{a^2-5a}{a+5}$;
6) $\left(\frac{2a-6}{a^2-4a+4}-\frac{a-4}{a^2-2a}\right):\frac{a^2-8}{a^3-4a}$.

### Алгебраїчні рівняння. Системи алгебраїчних рівнянь

**24.64.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+2}{x^2-4}=0$;
3) $\frac{x+2}{x+2}=1$;
5) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}=0$;
2) $\frac{x^2-4}{x+2}=0$;
4) $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=0$;
6) $\frac{10-4x}{x+9}+\frac{6x+8}{x+9}=0$.

**24.65.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{4}{1-4x^2}$;
3) $\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{3x}{x+1}$;
2) $\frac{x^2+8x}{x+10}=\frac{20}{x+10}$;
4) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$.

**24.66.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4-10x^2+24=0$;
2) $x^4-3x^2-70=0$.

**24.67.** При якому значенні $b$ має один корінь рівняння:

1) $2x^2+8x-b=0$;
2) $5x^2-bx+20=0$?

**24.68.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x+y=1,\\7x-3y=23;\end{cases}$
2) $\begin{cases}3x-5y=6,\\6x+5y=-3;\end{cases}$
3) $\begin{cases}6x+7y=38,\\3x-4y=4.\end{cases}$

**24.69.** Пряма $y=kx+b$ проходить через точки $M(3;\,3)$ і $E(1;\,7)$. Запишіть рівняння цієї прямої.

**24.70.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x+y=1,\\xy=-20;\end{cases}$
2) $\begin{cases}x+3y=1,\\x^2+2xy-y^2=-1;\end{cases}$
3) $\begin{cases}x^2+xy-5y=-3,\\4x-y=3.\end{cases}$

**24.71.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases}y-x=0,\\2x+y=-6;\end{cases}$
2) $\begin{cases}x+y=-1,\\2x+2y=-3;\end{cases}$
3) $\begin{cases}x^2-y=6,\\x+y=6;\end{cases}$
4) $\begin{cases}xy=8,\\x+y=-6.\end{cases}$

**24.72.** Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\y+x=3;\end{cases}$
2) $\begin{cases}x^2-y=1,\\x^2+y=4x.\end{cases}$

## Числові нерівності та їхні властивості. Лінійні та квадратні нерівності та їх системи

**24.73.** Дано: $-4 < x < 2$. Оцініть значення виразу: 1) $3x - 1$; 2) $8 - 5x$.

**24.74.** Дано: $2 < x < 6$ і $3 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) $xy$; 4) $\dfrac{x}{y}$; 5) $5x + 2y$; 6) $3x - 4y$.

**24.75.** Оцініть довжину середньої лінії трапеції з основами $x$ см і $y$ см, якщо $8 < x < 12$, $7 < y < 14$.

**24.76.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x+2)^2 \geqslant 0$; 3) $(x+2)^2 > 0$; 5) $0x < -5$; 7) $0x < 5$;
2) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 4) $(x+2)^2 < 0$; 6) $0x \geqslant -5$; 8) $0x \geqslant 5$.

**24.77.** Розв'яжіть нерівність:

1) $8x + 4 \leqslant 30 - 5x$; 3) $0{,}3(8 - 3y) \leqslant 3{,}2 - 0{,}8(y - 7)$;
2) $9 - 4x < 6x - 25$; 4) $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x+2}{6} \leqslant 4$.

**24.78.** Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $3x + 9 > 5x - 7$; 2) $14x^2 - (2x - 3)(7x + 4) \leqslant 14$.

**24.79.** Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $x - 5 < 3x + 8$; 2) $18x^2 - (3x - 2)(6x + 5) \leqslant 20$.

**24.80.** При яких значеннях $a$ рівняння:

1) $x^2 + x - a = 0$ не має коренів;
2) $2x^2 - 16x + 5a = 0$ має хоча б один дійсний корінь?

**24.81.** Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 7x - 1 \geqslant 5x - 3, \\ 3x + 6 \geqslant 8x - 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x(x - 3) - x(2 + 3x) < 4, \\ 6x^2 - (2x - 3)(3x + 4) < 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0{,}6(x - 6) \leqslant x + 2, \\ 4x + 7 > 2(x + 6{,}5); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{5x - 10}{6} > \dfrac{2x + 1}{3}, \\ \dfrac{3x + 1}{2} - 4x > 5 - \dfrac{3x - 2}{4}. \end{cases}$

**24.82.** Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 6x - 7 < 3x + 17, \\ 8 - 2x > 14 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 20 \geqslant x + 5, \\ 2x + 2 \geqslant 4x - 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 1 > 2x + 4, \\ 6x - 5 \leqslant 13 - x. \end{cases}$

**24.83.** Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 6x - 7 < 0$; 6) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;
2) $x^2 + 2x - 48 \geqslant 0$; 7) $4x^2 - 16x \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; 8) $4x^2 - 49 > 0$;
4) $-x^2 - 4x - 3 < 0$; 9) $2x^2 - x + 1 > 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$; 10) $3x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$.

**24.84.** Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $20 + 8x - x^2 > 0$; 2) $4x^2 - 17x + 4 \leqslant 0$?

### Степені та корені

**24.85.** Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{-2} + 5^{-1}$; 2) $6^{-2} - 12^{-1}$; 3) $0,08^0 + 0,9^0$; 4) $(4 \cdot 2^{-3} - 10^{-1})^{-1}$?

**24.86.** Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-3} + a^{-4}$; 3) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-2}$;

2) $mn^{-5} + m^{-5}n$; 4) $(x^{-4} + y^{-4}) \cdot (x^4 + y^4)^{-1}$.

**24.87.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3^{12} \cdot 27^3}{9^9}$; 3) $100^{-2} : 1000^{-6} \cdot 0,01^8$; 5) $\dfrac{(-36)^{-3} \cdot 6^7}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;

2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\dfrac{3}{16}\right)^7$; 4) $(0,2^{-3})^{-2} : 25^{-4}$; 6) $\dfrac{6^{-14}}{81^{-3} \cdot 16^{-4}}$.

**24.88.** Знайдіть значення виразу:

1) $-3\sqrt{0,16} + 0,8$; 4) $\left(3\sqrt{8}\right)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2$;

2) $\dfrac{1}{9} \cdot \left(\sqrt{18}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{28}\right)^2$; 5) $0,2\sqrt[3]{1000} - \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{81}$;

3) $50 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{3}\right)^2$; 6) $\sqrt[7]{-128} + 3\left(\sqrt[9]{9}\right)^9 - 4\sqrt[3]{216}$.

**24.89.** При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{3 - a}$; 3) $\sqrt{a^4 + 1}$; 5) $\sqrt[9]{a - 8}$;

2) $\sqrt{a^2}$; 4) $\sqrt[8]{x + 4}$; 6) $\sqrt[6]{-x^2}$?

**24.90.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 7$; 3) $x^7 = 9$; 5) $x^4 = 16$;

2) $x^2 = -16$; 4) $x^5 = -2$; 6) $x^6 = 5$.

**24.91.** Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,4}$; 3) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt[9]{2^7 \cdot 7^4} \cdot \sqrt[9]{7^5 \cdot 2^{20}}$; 6) $\sqrt[5]{\sqrt{17} - 7} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{17} + 7}$.

**24.92.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9x^8y^{10}}$, якщо $y \geqslant 0$; 3) $\sqrt[7]{k^7}$;

2) $\sqrt{0,64x^6y^2}$, якщо $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; 4) $\sqrt[3]{0,008p^{24}n^{30}}$.

**24.93.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^8}$;

2) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-6\right)^4}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{23}-7\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{23}-3\right)^2}$;

4) $\sqrt[6]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^6}+\sqrt[5]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^5}$.

**24.94.** Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18a^8}$;

2) $\sqrt[4]{x^9}$;

3) $\sqrt[3]{-m^{10}}$;

4) $\sqrt[6]{a^{10}b^9}$, якщо $a \leqslant 0$;

5) $\sqrt[4]{-81a^{11}}$;

6) $\sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}$.

**24.95.** Спростіть вираз (змінні набувають невід'ємних значень):

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^4}}$;

2) $\sqrt[3]{c\sqrt[7]{c^2}}$;

3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

**24.96.** Спростіть вираз:

1) $\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$;

2) $\left(\sqrt{99}-\sqrt{44}\right)\sqrt{11}$;

3) $\left(5-\sqrt{7}\right)\left(3+2\sqrt{7}\right)$;

4) $\left(\sqrt{14}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{11}\right)$.

**24.97.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$;

2) $\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}$;

3) $\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$.

**24.98.** Порівняйте:

1) $\sqrt{39}$ і $2\sqrt{10}$;

2) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{0{,}4}$;

3) 4 і $\sqrt[3]{65}$;

4) $3\sqrt[3]{3}$ і $2\sqrt[3]{10}$;

5) $\sqrt[4]{6}$ і $\sqrt[8]{35}$;

6) $\sqrt[6]{7}$ і $\sqrt[4]{3}$.

**24.99.** Знайдіть значення виразу:

1) $5^{3{,}6}\cdot 5^{-1{,}2}\cdot 5^{1{,}6}$;

2) $(3^{-0{,}8})^7 : 3^{-2{,}6}$;

3) $\left(7^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}}\cdot 49^{1{,}1}$;

4) $81^{-2{,}25}\cdot 9^{3{,}5}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$.

**24.100.** Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}$;

2) $\dfrac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{0{,}5}+b^{0{,}5}}{a-b}$;

4) $\dfrac{m^{1{,}5}-n^{1{,}5}}{m+m^{0{,}5}n^{0{,}5}+n}$;

5) $\dfrac{a-2a^{0{,}5}b^{0{,}5}+b}{ab^{0{,}5}-a^{0{,}5}b}$;

6) $\dfrac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}$.

### Ірраціональні рівняння

**24.101.** Скільки коренів має рівняння:

1) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

2) $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{6-x}=0$?

**24.102.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x-3}=\sqrt{4x^2-6x-1}$;
2) $\sqrt{x^2+x-4}=\sqrt{-2x}$;
3) $\sqrt{x+7}=x+5$;
4) $\sqrt{12+x-2x^2}=2-x$;
5) $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}=1$;
6) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{x-4}=4$.

**24.103.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$;
2) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-3=0$;
3) $\sqrt[3]{4-4x+x^2}-\sqrt[3]{2-x}-2=0$;
4) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}}=1$.

## Функції та їхні властивості

**24.104.** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$;
2) $f(x)=\dfrac{7x+14}{x^2-7x}$;
3) $f(x)=\sqrt[6]{x+6}+\sqrt[8]{4-x}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-7}+\dfrac{x+2}{x-8}$;
5) $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-21}-\dfrac{6}{x^2-49}$.

**24.105.** На рисунку 24.1 зображено точку, через яку проходить графік функції $y=f(x)$. Серед даних функцій укажіть цю функцію.

1) $f(x)=x^{-4}$; 2) $f(x)=\dfrac{4}{x}$; 3) $f(x)=\sqrt{17+x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$.

**24.106.** Побудуйте графік даної функції та, користуючись ним, укажіть проміжки знакосталості функції, її проміжки зростання та проміжки спадання:

1) $y=2-x^2$; 2) $y=(x+4)^2$; 3) $y=8-2x-x^2$; 4) $y=x^2-2x+3$.

**24.107.** Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$; 2) $f(x)=\dfrac{4x-16}{x^2-4x}$.

**24.108.** Відомо, що $f(-4)=-2$. Знайдіть $f(4)$, якщо функція $f$ є: 1) парною; 2) непарною.

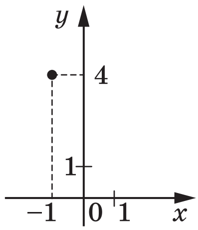


**Рис. 24.1**

**24.109.** Чи є парною або непарною функція:

1) $f(x)=6x^3-7x^5$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{6-x^2}$;
4) $f(x)=x^2+x-3$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-2x}$;
6) $f(x)=(x+5)(x-1)-4x$?

**24.110.** Задайте формулою пряму пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $M(3; -7)$.

**24.111.** Знайдіть значення $b$, якщо відомо, що графік функції $y = -\frac{1}{6}x + b$ проходить через точку $M(12; 5)$.

**24.112.** Знайдіть значення $k$, якщо відомо, що графік функції $y = kx - 10$ проходить через точку $M(-4; 2)$.

**24.113.** Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює $-5$. Знайдіть значення $k$ і $b$.

**24.114.** Задайте формулою лінійну функцію, графік якої зображено на рисунку 24.2.

**24.115.** Знайдіть значення $k$, при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

1) $A(-5; 8)$; 2) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$.

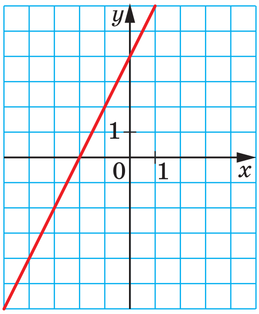


**Рис. 24.2**

**24.116.** При яких значеннях $p$ і $q$ графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $A(-1; 4)$ і $B(-2; 3)$?

**24.117.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^6$ на проміжку: 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$.

**24.118.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^{-3}$ на проміжку: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

**24.119.** На рисунку 24.3 зображено графік лінійної функції $y = kx + b$. Укажіть правильне твердження:
1) $k > 0$, $b > 0$; 2) $k > 0$, $b < 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.

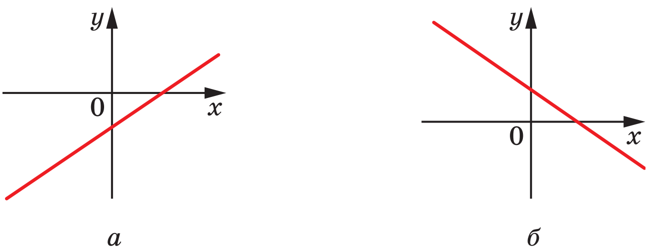


**Рис. 24.3**

### Прогресії

**24.120.** Знайдіть різницю арифметичної прогресії $(x_n)$, якщо:
1) $x_1 = 17,\ x_9 = -7$; 2) $x_5 = -3,\ x_{14} = 42$.

**24.121.** Знайдіть перший член арифметичної прогресії $(y_n)$, якщо:
1) $y_{10} = -19,\ d = -2$; 2) $y_5 = 13,\ y_{16} = 46$.

**24.122.** Знайдіть номер члена арифметичної прогресії $(z_n)$, який дорівнює 3,2, якщо $z_1 = 9{,}2$ і $d = -0{,}6$.

**24.123.** Чи є число 24 членом арифметичної прогресії $(b_n)$, якщо $b_1 = 8$ і $d = 3$? У разі ствердної відповіді укажіть номер цього члена.

**24.124.** Дано арифметичну прогресію 4,9; 4,5; 4,1; ... . Починаючи з якого номера її члени будуть від'ємними?

**24.125.** При якому значенні $m$ значення виразів $3m - 1$, $m^2 + 1$ і $m + 3$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

**24.126.** Арифметичну прогресію $(a_n)$ задано формулою $n$-го члена $a_n = 0{,}2n + 5$. Знайдіть суму двадцяти шести перших членів прогресії.

**24.127.** Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії $(a_n)$, якщо:
1) $a_1 = 6,\ a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34,\ a_{14} = -54$.

**24.128.** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, кратних 11, які не більші за 341.

**24.129.** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, кратних 9, які не більші за 156.

**24.130.** Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, кратних числу 8.

**24.131.** Знайдіть знаменник геометричної прогресії $(b_n)$, якщо:
1) $b_1 = 108,\ b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6,\ b_4 = 30$.

**24.132.** Знайдіть перший член геометричної прогресії $(c_n)$, якщо $c_4 = 40,\ c_7 = -320$.

**24.133.** Число 192 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 3,\ \ldots$ . Знайдіть номер цього члена.

**24.134.** Які три числа треба вставити між числами 48 і 243, щоб вони разом з даними числами утворили геометричну прогресію?

**24.135.** Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії $(b_n)$, якщо:
1) $b_4 = 280,\ q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2},\ b_5 = 4\sqrt{2},\ q < 0$.

## Тригонометричні функції

**24.136.** При яких значеннях $a$ можлива рівність $\cos x = a - 2$?

**24.137.** Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $6 + \sin^2\alpha$.

**24.138.** Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\,140°$ і $\mathrm{tg}(-140°)$; 3) $\mathrm{tg}\frac{6\pi}{5}$ і $\cos\frac{5\pi}{7}$;

2) $\cos 50°$ і $\sin 350°$; 4) $\cos 5$ і $\sin 4$.

**24.139.** Чи є парною або непарною функція, задана формулою:

1) $f(x) = 2x + \sin x$; 3) $f(x) = \mathrm{tg}\,x + x^2$;

2) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\,x}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{(2-x)\cos x}{2-x}$?

**24.140.** Обчисліть значення тригонометричних функцій аргументу $\alpha$, якщо:

1) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\sqrt{2}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

**24.141.** Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} + \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$; 2) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

**24.142.** Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)} = \mathrm{tg}\,\alpha$;

2) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \mathrm{tg}(\alpha + \beta)$.

**24.143.** Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi - \alpha)$;

2) $\frac{\sin(180° - \alpha)\cos(180° + \alpha)\mathrm{tg}(180° - \alpha)}{\sin(270° - \alpha)\mathrm{tg}(180° + \alpha)\cos(90° + \alpha)}$.

**24.144.** Спростіть вираз:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$.

**24.145.** Доведіть тотожність:

1) $\mathrm{tg}\,2\alpha(1 + \cos 4\alpha) - \sin 4\alpha = 0$; 2) $\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha} = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

### Тригонометричні рівняння

**24.146.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 5x = -\frac{1}{2}$;

2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$;

3) $\cos\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\operatorname{tg} 7x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 1$.

**24.147.** Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**24.148.** Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ належать проміжку $[0; \pi]$?

**24.149.** Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;

2) $\sin^2 3x + 3\cos 3x = 3$;

3) $\cos 2x - 3\sin x = 2$;

4) $\cos 8x - 5\cos 4x - 2 = 0$;

5) $\frac{3}{\cos^2 x} + 5\operatorname{tg} x - 11 = 0$;

6) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

### 15. Показникова функція. Показникові рівняння і нерівності

**24.150.** На одному з рисунків 24.4, *а*–*г* зображено графік функції $y = 0{,}2^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

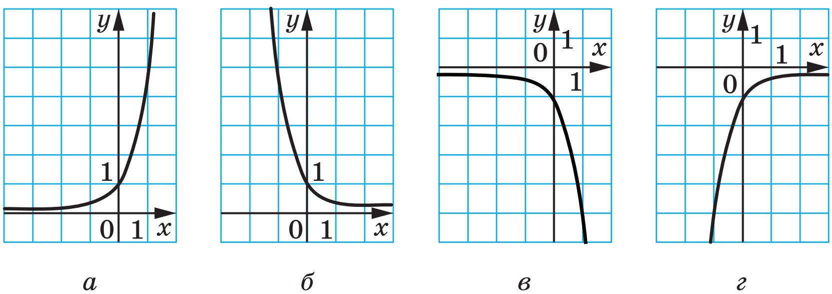



**Рис. 24.4**

**24.151.** Яка область значень функції $f(x) = 9^x + 2$?

**24.152.** Відомо, що $0{,}7^m > 0{,}7^n$. Порівняйте числа $m$ і $n$.

**24.153.** Яка з даних функцій не є зростаючою:

1) $y = e^x$; 2) $y = \pi^x$; 3) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$?

**24.154.** Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;
2) $0{,}75^{x+1} = \frac{16}{9}$;
3) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;
4) $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216}$;
5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;
6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$.

**24.155.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;
2) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;
3) $1{,}3^{x^2-4x+2} \leqslant 1{,}69$;
4) $0{,}4^{x^2+2x+2} \leqslant 0{,}16$.

**24.156.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;
2) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 68$;
3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;
4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262$.

**24.157.** Розв'яжіть нерівність:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;
2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;
3) $0{,}5^{x+3} - 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x+1} < 0{,}375$;
4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$.

**24.158.** Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;
2) $9^x + 3^x - 6 = 0$;
3) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;
4) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;
5) $(0{,}2)^{2x-2} - 126 \cdot (0{,}2)^x + 5 = 0$;
6) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$.

**24.159.** Розв'яжіть нерівність:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;
2) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;
3) $3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0{,}5x} + 3 \geqslant 0$;
4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$.

## Логарифмічна функція. Логарифмічні рівняння і нерівності

**24.160.** Обчисліть:

1) $2^{1-\log_2 7}$;
2) $5^{3\log_5 2}$;
3) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 5}$;
4) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$;
5) $\lg 20 + \lg 50$;
6) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$.

**24.161.** Областю визначення якої з даних функцій є множина дійсних чисел:

1) $y = \lg(x+1)$; 2) $y = \lg(x^2-1)$; 3) $y = \lg(x^2+1)$; 4) $y = \lg x^2$?

**24.162.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg \lg x$; 2) $y = \log_{x-2}(x^2 + x + 3)$.

**24.163.** На рисунку 24.5 зображено графік спадної функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки коренів має рівняння $f(x) = \log_4 x$?

**24.164.** Побудуйте графік функції:

1) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$; 3) $y = e^{\ln(4-x^2)}$.

2) $y = 10^{\lg \sin x}$;

**24.165.** Порівняйте числа $m$ і $n$, якщо:

1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$; 2) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n$.

**24.166.** Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 7 < \log_a 6$; 2) $\log_a 5 > 0$.

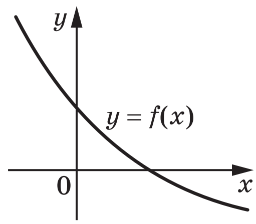



**Рис. 24.5**

**24.167.** Порівняйте з нулем число:

1) $\log_2 \frac{1}{5}$; 2) $\log_3 4$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 10$.

**24.168.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$; 4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;

2) $\lg x = 3 - \lg 20$; 5) $\lg(5x + 2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;

3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$; 6) $\log_9(4x - 6) = \log_9(2x - 4)$.

**24.169.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(2x - 1) + \lg(x + 5) = \lg 13$;

2) $\log_3(2x - 7) + \log_3(x - 1) = 2 + \log_3 2$;

3) $\log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$;

4) $\log_7(-x) + \log_7(1 - x) = \log_7(x + 3)$.

**24.170.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$; 3) $\frac{2}{\lg x + 2} - \frac{1}{\lg x - 4} = 1$;

2) $\ln^2 x - 4\ln x - 21 = 0$; 4) $\log_9 x + \log_x 9 = 2,5$.

**24.171.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_7(2x - 1) < 2$; 5) $\log_6(x + 1) < \log_6(2x + 5)$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) > 1$; 6) $\log_2(2x - 3) > \log_2(3x - 5)$;

3) $\log_4(x + 1) < -\frac{1}{2}$; 7) $\ln(x^2 - 3) > \ln(3x - 7)$;

4) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geqslant -1$; 8) $\log_{0,7}(3x - 1) < \log_{0,7}(3 - x)$.

**24.172.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2 x + \log_2 (x+1) \leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}} (x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}} (x+3)$.

**24.173.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg^2 x - \lg x \geqslant 0$;
2) $\ln^2 x + \ln x \leqslant 0$;
3) $3\log_8^2 x + 2\log_8 x - 5 \geqslant 0$.

### Похідна та її застосування

**24.174.** Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^6 + 2x^4 + \frac{4}{x^2} - 1$;
2) $y = \frac{1}{2x^3} + \frac{4}{x}$;
3) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$;
4) $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$;
5) $y = 2^x \cos x$;
6) $y = \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$.

**24.175.** Обчисліть значення похідної даної функції в точці $x_0$:

1) $f(x) = \frac{3x^2}{1 - x}$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{4 - \sin x}$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = \cos x - \sin\frac{\pi}{3}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$.

**24.176.** Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ (час $t$ вимірюється в секундах, переміщення $s$ — у метрах). Через скільки секунд після початку руху точка зупиниться?

**24.177.** Складіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці з абсцисою $x_0$:

1) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sin x \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

**24.178.** До графіка функції $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ проведено дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $-9$. Знайдіть координати точки дотику.

**24.179.** Знайдіть координати точки параболи $y = x^2 - 3x + 2$, дотична в якій паралельна прямій $y = 6 - x$.

**24.180.** Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$, яка паралельна прямій $y = 5x - 8$.

**24.181.** Функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[-8; 3]$ і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку 24.6 зображено графік її похідної $y = f'(x)$. Укажіть:
1) проміжки зростання і спадання функції $y = f(x)$;
2) точки мінімуму і точки максимуму функції $y = f(x)$.

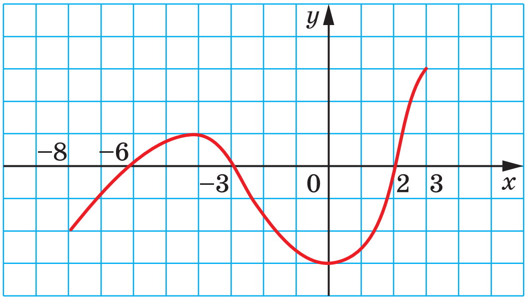



**Рис. 24.6**

**24.182.** Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$;
2) $f(x) = x^3 + 2x - 10$;
3) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$;
4) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{e} - e^x$;
6) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

**24.183.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на проміжку $[-2; 0]$;
2) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ на проміжку $[0; 4]$;
3) $f(x) = \cos x - \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$;
4) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ на проміжку $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

**24.184.** Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
1) $f(x) = x^3 - 9x$;
2) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$.

### Інтеграл та його застосування

**24.185.** Знайдіть загальний вигляд первісних функції:
1) $f(x) = x - \frac{2}{x^5}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
2) $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

**24.186.** Для функції $f$ знайдіть на вказаному проміжку $I$ первісну $F$, графік якої проходить через дану точку $M$:

1) $f(x) = 2x + 4,\ I = (-\infty; +\infty),\ M(2;\ 1);$

2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3,\ I = (-\infty; +\infty),\ M(1;\ 8).$

**24.187.** Обчисліть інтеграл:

1) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2};$

2) $\int\limits_{-2}^1 (x^2 - 2x + 4)\,dx;$

3) $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx;$

4) $\int\limits_0^\pi (6\cos x - 3\sin x)\,dx.$

**24.188.** Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2 - x^2,\ y = 0;$

2) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3;$

3) $y = -x^2 + 4,\ x + y = 4;$

4) $y = x^2 - 4x + 5,\ y = 5 - x.$

## Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики

**24.189.** У їдальні є 3 перші страви, 6 других страв і 4 третіх. Скількома способами можна скласти з них обід?

**24.190.** Скількома способами можна розставити на полиці 8 різних книжок?

**24.191.** Скількома способами можна з 32 учнів вибрати трьох делегатів на шкільну конференцію?

**24.192.** В оркестрі 16 скрипалів і 12 альтистів. Скількома способами можна скласти тріо з двох скрипалів і одного альтиста?

**24.193.** Скільки існує п'ятицифрових чисел, записаних за допомогою цифр 2, 3, 4, 5, 6, усі цифри яких різні та які діляться націло на 5?

**24.194.** У коробці лежать 12 зелених і 18 синіх куль. Яка ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться: 1) зеленою; 2) синьою; 3) червоною; 4) зеленою або синьою?

**24.195.** У лотереї розігруються 6 автомобілів, 18 мотоциклів і 42 велосипеди. Усього випущено 3000 лотерейних білетів. Яка ймовірність, купивши один білет: 1) виграти мотоцикл; 2) виграти який-небудь приз; 3) не виграти ніякого призу?

**24.196.** Із натуральних чисел від 1 до 16 включно учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що це число виявиться дільником числа 16?

**24.197.** Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться націло на 12?

**24.198.** У коробці лежать 3 білих і 4 синіх кулі. Яку найменшу кількість куль треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед них виявиться хоча б одна синя куля, дорівнювала 1?

**24.199.** Чотири картки пронумеровано числами 1, 2, 3 і 4. Яка ймовірність того, що добуток номерів двох навмання вибраних карток буде кратним 3?

**24.200.** У коробці лежать червоні та жовті кулі. Скільки червоних куль у коробці, якщо ймовірність вийняти з неї навмання червону кулю дорівнює $\frac{3}{8}$, а жовтих куль у коробці 20?

**24.201.** На 30 картках записано натуральні числа від 1 до 30. Яка ймовірність того, що число, записане на навмання вибраній картці, ділиться націло на 3 і не ділиться націло на 2?

**24.202.** Із 28 кісток доміно навмання вибирають одну та обчислюють суму очок на ній (на рисунку 24.7 зображено кістку, сума очок якої дорівнює 7). Яка ймовірність вибрати кістку, сума очок якої дорівнює:

1) 4; 2) 7; 3) 10; 4) 12; 5) 15?

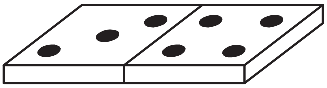


**Рис. 24.7**

**24.203.** На графіку, зображеному на рисунку 24.8, відображено об'єми продажу ручок у магазині канцтоварів протягом 6 місяців. Скільки в середньому продавали ручок за один місяць?

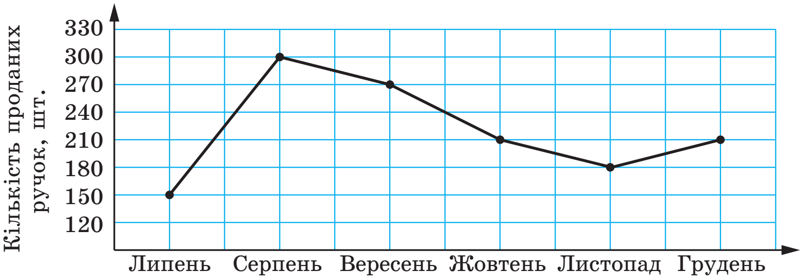



**Рис. 24.8**

**24.204.** Середнє значення вибірки 7, 10, $y$, 14 дорівнює 11. Чому дорівнює $y$?

**24.205.** Знайдіть середнє значення, моду, медіану та розмах сукупності даних:

1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;

2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12.

**24.206.** Серед учнів і учениць 11 класу провели опитування: скільки часу витрачають вони щодня на виконання домашніх завдань. Результати опитування подали у вигляді стовпчастої діаграми, зображеної на рисунку 24.9. Знайдіть моду та середнє значення даної вибірки.

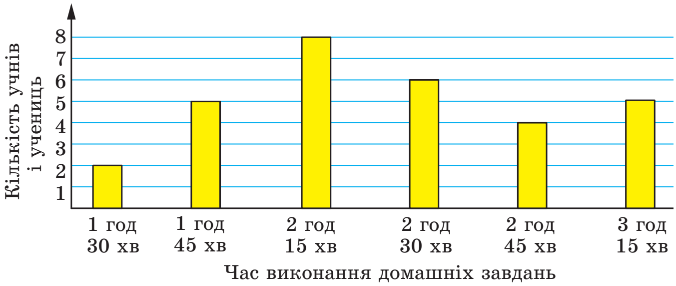



**Рис. 24.9**

**24.207.** За результатами диктанту з української мови в 11 класі склали таблицю, у якій відобразили розподіл кількості помилок, що їх припустилася одна особа:

| Кількість помилок | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість учнів і учениць | 5 | 4 | 6 | 8 | 2 |

Знайдіть моду та середнє значення вибірки, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

# 25. Задачі для повторення курсу геометрії

### Трикутники

**25.1.** Знайдіть периметр прямокутного трикутника, гіпотенуза якого на 7 см більша за один із катетів, а другий катет дорівнює 21 см.

**25.2.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 8,5 см. Обчисліть площу даного трикутника.

**25.3.** Висота рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу даного трикутника.

**25.4.** Висота $AD$ трикутника $ABC$ ділить сторону $BC$ на відрізки $BD$ і $CD$ так, що $BD = 15$ см, $CD = 5$ см. Знайдіть сторону $AC$, якщо $\angle B = 30°$.

**25.5.** Із точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої, якщо одна з похилих на 2 см більша за другу.

**25.6.** Знайдіть площу трикутника $ABC$, зображеного на рисунку 25.1.

**25.7.** Висота рівнобедреного тупокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус описаного навколо нього кола — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

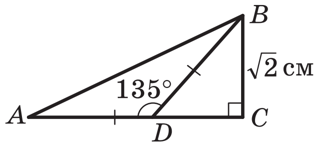



**Рис. 25.1**

**25.8.** Висота прямокутного трикутника з гострим кутом $\alpha$, проведена до гіпотенузи, дорівнює $h$. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

**25.9.** Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

**25.10.** Продовження бічних сторін $AB$ і $CD$ трапеції $ABCD$ перетинаються в точці $O$. Знайдіть сторону $AB$, якщо $AO = 18$ см, $BC : AD = 5 : 9$.

**25.11.** Продовження бічних сторін $AB$ і $CD$ трапеції $ABCD$ перетинаються в точці $F$, $AB : BF = 3 : 7$, $AD$ — більша основа трапеції. Різниця основ трапеції дорівнює 6 см. Знайдіть основу $AD$.

**25.12.** Кут при вершині першого рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині другого рівнобедреного трикутника. Основа та проведена до неї висота першого трикутника дорівнюють відповідно 30 см і 8 см, а бічна сторона другого трикутника — 51 см. Чому дорівнює периметр другого трикутника?

**25.13.** На стороні $BC$ трикутника $ABC$ позначили точку $K$ так, що $\angle CAK = \angle ABC$, $BK = 12$ см, $KC = 4$ см. Знайдіть сторону $AC$.

**25.14.** Діагоналі трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ перетинаються в точці $O$, $BO : OD = 3 : 4$, $BC = 18$ см. Знайдіть основу $AD$ трапеції.

**25.15.** Діагоналі трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ перетинаються в точці $O$, $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ см. Знайдіть відрізок $OD$.

**25.16.** У трикутник $ABC$ вписано ромб $CDEF$ так, як показано на рисунку 25.2. Знайдіть сторону $BC$ трикутника, якщо $AC = 15$ см, а сторона ромба дорівнює 10 см.

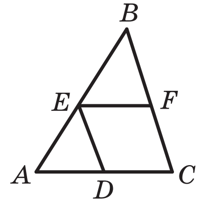



**Рис. 25.2**

**25.17.** Точка $M$ — середина сторони $AB$ трикутника $ABC$, точка $K$ — середина сторони $AC$. Площа трикутника $AMK$ дорівнює 12 см$^2$. Чому дорівнює площа чотирикутника $BMKC$?

**25.18.** Точка $D$ — середина сторони $AB$ трикутника $ABC$, точка $E$ — середина сторони $BC$. Площа чотирикутника $ADEC$ дорівнює 27 см$^2$. Чому дорівнює площа трикутника $ABC$?

**25.19.** Відрізок $CM$ — медіана трикутника $ABC$, зображеного на рисунку 25.3, відрізок $DE$ — середня лінія трикутника $MBC$. Чому дорівнює площа чотирикутника $MDEC$, якщо площа трикутника $ABC$ дорівнює 48 см$^2$?

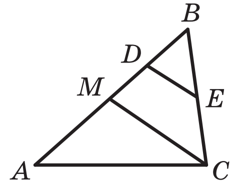


**Рис. 25.3**

**25.20.** Пряма, паралельна стороні $AC$ трикутника $ABC$, перетинає його сторону $AB$ у точці $M$, а сторону $BC$ — у точці $K$. Знайдіть площу трикутника $ABC$, якщо $BM = 3$ см, $AM = 4$ см, а площа чотирикутника $AMKC$ дорівнює 80 см$^2$.

**25.21.** Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника віддалена від його основи на 9 см. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до його основи.

**25.22.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ з основою $AC$ точка перетину медіан віддалена від вершини $B$ на 6 см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони трикутника до його основи.

**25.23.** Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник $ABC$ ($AB = BC$), дорівнює 12 см, а відстань від центра цього кола до вершини $B$ — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

**25.24.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні 8 : 9, рахуючи від вершини кута при основі трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

**25.25.** Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

**25.26.** Сума двох сторін трикутника дорівнює 16 см, а кут між ними — 120°. Знайдіть меншу із цих сторін, якщо третя сторона трикутника дорівнює 14 см.

**25.27.** Знайдіть кут $A$ трикутника $ABC$, якщо $BC = 7$ см, $AC = 3$ см, $AB = 8$ см.

**25.28.** Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника зі сторонами 7 см, 8 см і 9 см.

**25.29.** Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см. Знайдіть радіус вписаного кола даного трикутника.

## Чотирикутники. Правильні многокутники

**25.30.** Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 6 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює $30^\circ$.

**25.31.** Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 7, рахуючи від вершини гострого кута, який дорівнює $45^\circ$. Обчисліть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 52 см.

**25.32.** Бісектриса кута $D$ прямокутника $ABCD$ перетинає сторону $AB$ у точці $M$, $BM = 5$ см, $AD = 3$ см. Знайдіть периметр прямокутника.

**25.33.** Обчисліть площу ромба, одна з діагоналей якого дорівнює 16 см, а сторона — 10 см.

**25.34.** Більша діагональ ромба дорівнює $c$, а тупий кут — $\alpha$. Знайдіть периметр ромба.

**25.35.** Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 23 см і 17 см, а діагональ — 25 см.

**25.36.** Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 25.4.

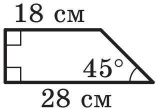



**Рис. 25.4**

**25.37.** Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює $a$, а один із кутів — $60^\circ$. Знайдіть площу трапеції.

**25.38.** Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 16 см, а гострий кут — $30^\circ$. Знайдіть площу цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

**25.39.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см і 17 см, а діагональ ділить її тупий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.

**25.40.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 33 см, а діагональ ділить її гострий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції.

**25.41.** Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 18 см. Знайдіть площу трапеції.

**25.42.** Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

**25.43.** Чому дорівнює кут $BAD$ чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle ACD = 37°$, $\angle ADB = 43°$?

**25.44.** Діагональ $BD$ чотирикутника $ABCD$ є діаметром його описаного кола, $M$ — точка перетину його діагоналей, $\angle ABD = 32°$, $\angle CBD = 64°$. Знайдіть кут $BMC$.

**25.45.** Як відноситься сторона правильного трикутника, вписаного в коло, до сторони правильного трикутника, описаного навколо цього кола?

**25.46.** Як відноситься сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, до сторони правильного шестикутника, описаного навколо цього кола?

**25.47.** Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є стороною правильного трикутника, вписаного в одне коло, і стороною квадрата, вписаного в друге коло. Довжина цієї хорди дорівнює $a$. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо вони лежать по різні боки від хорди.

### Коло та круг

**25.48.** Знайдіть градусну міру дуги кола, довжина якої дорівнює $\pi$ см, якщо радіус кола дорівнює 12 см.

**25.49.** Довжина дуги кола дорівнює $2\pi$ см, а її градусна міра — $60°$. Знайдіть радіус кола.

**25.50.** Відрізок $AB$ — діаметр кола, $AB = 24$ см. Точка $A$ віддалена від дотичної до цього кола на 4 см. Знайдіть відстань від точки $B$ до цієї дотичної.

**25.51.** Перпендикуляр, опущений із точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, різниця яких дорівнює 21 см. Знайдіть довжину кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.

**25.52.** Два кола із центрами $O_1$ і $O_2$ мають зовнішній дотик у точці $C$. Пряма, яка проходить через точку $C$, перетинає коло із центром $O_1$ у точці $A$, а друге коло — у точці $B$. Хорда $AC$ дорівнює 12 см, а хорда $BC$ — 18 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо $O_1O_2 = 20$ см.

**25.53.** У кут, величина якого становить $60°$, вписано два кола, які мають зовнішній дотик одне до одного. Знайдіть радіус більшого з них, якщо радіус меншого дорівнює 6 см.

## Декартові координати

**25.54.** Точка $C$ — середина відрізка $AB$, $A(-4;\ 3)$, $C(2;\ 1)$. Знайдіть координати точки $B$.

**25.55.** Вершинами трикутника є точки $A(-3;\ 1)$, $B(2;\ -2)$ і $C(-4;\ 6)$. Знайдіть медіану $AM$ трикутника $ABC$.

**25.56.** Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, $B(4;\ 1)$, $C(-1;\ 1)$, $D(-2;\ -2)$. Знайдіть координати вершини $A$.

**25.57.** Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок $C(3;\ 2)$ і $D(1;\ -6)$.

**25.58.** Коло задано рівнянням $(x+4)^2+(y-1)^2=12$. Як розташована точка $A(-2;\ 3)$ відносно цього кола?

**25.59.** Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок $MK$, якщо $M(-3;\ 4)$, $K(5;\ 10)$.

**25.60.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 4)$ і $B(-3;\ -2)$.

**25.61.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\left(\sqrt{3};\ 5\right)$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $60°$.

**25.62.** Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $P(2;\ -5)$ і паралельна прямій $y=-0{,}5x+9$.

**25.63.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1;\ 5)$, $B(4;\ 6)$, $C(3;\ 1)$ і $D(-2;\ 0)$ є ромбом.

**25.64.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2;\ -2)$, $B(1;\ 2)$, $C(-3;\ 1)$ і $D(-2;\ -3)$ є прямокутником.

**25.65.** Знайдіть відстань від точки $M(4;\ -5;\ 6)$ до площини $xz$.

**25.66.** Знайдіть відстань від точки $A(3;\ -2;\ 1)$ до початку координат.

**25.67.** Знайдіть відстань між точками $A(2;\ -3;\ -4)$ і $B(-6;\ -3;\ 2)$.

**25.68.** Точки $A(-4;\ 2;\ -6)$ і $B(-14;\ -10;\ 2)$ симетричні відносно точки $C$. Знайдіть координати точки $C$.

**25.69.** Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $M(-1;\ 2;\ 3)$ відносно площини $xy$.

## Вектори

**25.70.** Дано вектори $\vec{a}(3;-1)$ і $\vec{b}(1;-2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, якщо $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

**25.71.** Відомо, що $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(-2; 3)$.

**25.72.** Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

**25.73.** Дано точки $M(4; -2)$, $N(1; 1)$ і $P(3; 3)$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MP}$.

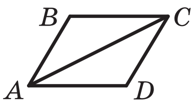



**Рис. 25.5**

**25.74.** На рисунку 25.5 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 2$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

**25.75.** Сторона правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 1. Обчисліть скалярний добуток:
1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$.

**25.76.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(-1; -1)$ і $\vec{b}(2; 0)$.

**25.77.** На стороні $CD$ паралелограма $ABCD$ позначили точку $M$ так, що $CM : MD = 2 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

**25.78.** На сторонах $BC$ і $CD$ паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки $E$ і $F$ так, що $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

**25.79.** Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-2; 8; 7)$, $B(-6; 5; 6)$.

**25.80.** При якому значенні $m$ вектори $\vec{a}(5; m+1; -3)$ і $\vec{b}(-10; 4; 6)$ будуть колінеарними?

**25.81.** При якому значенні $n$ вектори $\vec{a}(3; 2; 6)$ і $\vec{b}(-8; 3; n)$ будуть перпендикулярними?

**25.82.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(-1; 1; 0)$ і $\vec{b}(1; 0; -1)$.

### Геометричні перетворення

**25.83.** Скільки існує паралельних перенесень, при яких образом прямої є: 1) сама ця пряма; 2) паралельна їй пряма?

**25.84.** Запишіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 4$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(2; -3)$.

**25.85.** Укажіть рух, при якому образом чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку 25.6, є чотирикутник $MNKP$.

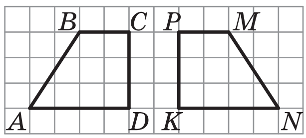



**Рис. 25.6**

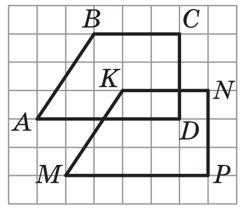



**Рис. 25.7**

**25.86.** Укажіть рух, при якому образом чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку 25.7, є чотирикутник $MKNP$.

**25.87.** При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(-3; 7)$ є точка $B(2; 3)$. Які координати має образ точки $C(1; -5)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$?

**25.88.** При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(-5; 6)$ є точка $B(2; -1)$. Які координати має прообраз точки $D(10; -3)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$?

**25.89.** Які координати має образ точки $A(-4; 6)$ при симетрії відносно початку координат?

**25.90.** Які координати має точка, симетрична точці $A(2; -4)$ відносно точки $M(3; -1)$?

**25.91.** Які координати має образ точки $A(-2; 5)$ при симетрії відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат?

**25.92.** Скільки осей симетрії має прямокутник, який не є квадратом?

**25.93.** Точка $O$ — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, зображеного на рисунку 25.8. Укажіть образ сторони $CD$ при повороті навколо точки $O$ за годинниковою стрілкою на кут 120°.

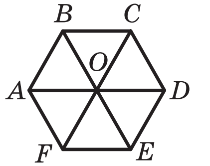



**Рис. 25.8**

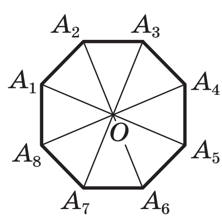



**Рис. 25.9**

**25.94.** Точка $O$ — центр правильного восьмикутника, зображеного на рисунку 25.9. Укажіть образ сторони $A_3A_4$ при повороті навколо точки $O$ проти годинникової стрілки на кут $135°$.

**25.95.** Квадрат $CDEF$, зображений на рисунку 25.10, є образом квадрата $ABCD$ при повороті за годинниковою стрілкою на кут $90°$. Яка точка є центром повороту?

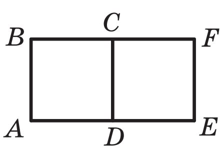



**Рис. 25.10**

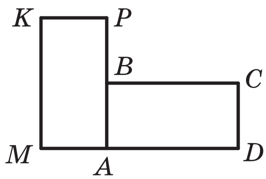



**Рис. 25.11**

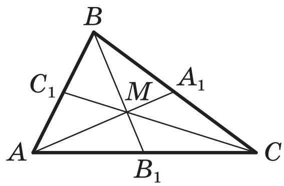



**Рис. 25.12**

**25.96.** Прямокутник $AMKP$, зображений на рисунку 25.11, є образом прямокутника $ABCD$ при повороті проти годинникової стрілки на кут $90°$. Яка точка є центром повороту?

**25.97.** Медіани трикутника $ABC$, зображеного на рисунку 25.12, перетинаються в точці $M$. Знайдіть коефіцієнт: 1) гомотетії із центром $M$, при якій точка $C_1$ є образом точки $C$; 2) гомотетії із центром $B$, при якій точка $M$ є образом точки $B_1$.

**25.98.** Точка $A_1(-1; 4)$ є образом точки $A(2; -8)$ при гомотетії із центром у початку координат. Чому дорівнює коефіцієнт гомотетії?

## Многогранники

**25.99.** Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 8 см, а його діагональ нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

**25.100.** Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

**25.101.** Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 8 см, а діагональ бічної грані — 17 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

**25.102.** Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 25 см, а діагональ бічної грані — 20 см. Знайдіть висоту призми.

**25.103.** Сторони основи прямої трикутної призми відносяться як 15 : 10 : 9. Знайдіть сторони основи, якщо площа бічної поверхні призми дорівнює 816 см$^2$, а бічне ребро призми — 12 см.

**25.104.** Висота прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 12 см, $AC = BC$, $AB = 8$ см, діагональ грані $BB_1C_1C$ дорівнює 13 см. Знайдіть площу перерізу призми, який проходить через пряму $AB$ і точку $C_1$.

**25.105.** Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює $a$, найбільша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

**25.106.** Дано пряму призму $ABCA_1B_1C_1$. Кут між площинами $ABC$ і $A_1BC$ дорівнює $\beta$. Знайдіть висоту призми, якщо $BC = a$, $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = \alpha$.

**25.107.** Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною $a$ та гострим кутом $\alpha$. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

**25.108.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см, а висота піраміди — $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

**25.109.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

**25.110.** Основою піраміди є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює $a$. Кут між цією стороною та діагоналлю прямокутника дорівнює $\alpha$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть висоту піраміди.

**25.111.** Основою піраміди є ромб, діагоналі якого дорівнюють 40 см і 30 см, а висота піраміди дорівнює 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо двогранні кути піраміди при ребрах її основи є рівними.

**25.112.** Основою піраміди $DABC$ є прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$). Площини $ABD$ і $ACD$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо $AB = 26$ см, $BC = 10$ см, $AD = 18$ см.

### Тіла обертання

**25.113.** Знайдіть площу повної поверхні циліндра, висота якого дорівнює 12 см, а радіус основи — 5 см.

**25.114.** Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

**25.115.** Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
1) радіус його основи збільшити в 3 рази, а висоту — у 4 рази;
2) радіус його основи зменшити у 2 рази, а висоту збільшити в 6 разів?

**25.116.** У циліндрі проведено переріз, який паралельний його осі та віддалений від неї на 3 см. Діагональ перерізу дорівнює 16 см і утворює з площиною основи циліндра кут $60°$. Знайдіть радіус основи циліндра.

**25.117.** У циліндрі проведено переріз, який паралельний його осі та відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $\alpha$ ($0° < \alpha < 180°$). Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи циліндра дорівнює $R$.

**25.118.** Через твірну циліндра проведено два перерізи, кожний з яких паралельний осі циліндра. Площини цих перерізів перпендикулярні. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо площа одного з даних перерізів дорівнює 30 см$^2$, а другого — 40 см$^2$.

**25.119.** Діаметр основи конуса дорівнює 6 см, а його висота — 4 см. Знайдіть твірну конуса.

**25.120.** Твірна конуса дорівнює $m$, а кут між твірною та висотою конуса дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

**25.121.** Твірна конуса дорівнює 25 см, а висота — 24 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

**25.122.** Радіус основи та висоту конуса збільшили у 2 рази. У скільки разів збільшилася площа бічної поверхні конуса?

**25.123.** Радіус основи конуса збільшили в 6 разів, а його твірну зменшили в 3 рази. Як змінилася площа бічної поверхні конуса — зменшилася або збільшилася — та в скільки разів?

**25.124.** Через вершину конуса та хорду основи, що стягує дугу $60°$, проведено площину, яка утворює з площиною основи кут $30°$. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює 4 см.

**25.125.** Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Радіус основи конуса дорівнює $R$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

**25.126.** Хорду основи конуса, довжина якої дорівнює $a$, видно із центра основи під кутом $\alpha$. Кут між твірною конуса та площиною основи дорівнює $\beta$. Знайдіть висоту конуса.

**25.127.** Сферу перетинає площина, яка відстоїть від її центра на 24 см. Знайдіть радіус сфери, якщо довжина отриманого перерізу становить $\frac{3}{5}$ довжини перерізу сфери площиною, що проходить через її центр.

**25.128.** Вершини прямокутного трикутника лежать на сфері, радіус якої дорівнює $3\sqrt{5}$ см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо катети трикутника дорівнюють 8 см і 15 см.

### Об'єми тіл. Площа сфери

**25.129.** Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює 8 см і утворює з площиною бічної грані кут $30°$. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

**25.130.** Бічні грані правильної шестикутної призми є квадратами, а її більша діагональ дорівнює $d$. Знайдіть об'єм призми.

**25.131.** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см та бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.

**25.132.** Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані — 12 см. Знайдіть об'єм призми.

**25.133.** Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом $30°$ при основі. Діагональ бічної грані призми, яка містить бічну сторону основи, дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм призми.

**25.134.** Основа прямої призми — ромб з діагоналями 5 см і 12 см. Менша діагональ призми дорівнює 13 см. Обчисліть об'єм призми.

**25.135.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а діагональний переріз є рівностороннім трикутником.

**25.136.** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 15 см. Обчисліть об'єм піраміди.

**25.137.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $16\sqrt{3}$ см, а апофема — 17 см. Обчисліть об'єм піраміди.

**25.138.** Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи — $30°$. Знайдіть об'єм піраміди.

**25.139.** Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом зі стороною 4 см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $90°$. Знайдіть об'єм циліндра.

**25.140.** Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом $\alpha$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи та середину даної хорди, нахилений до площини основи під кутом $\beta$. Знайдіть об'єм циліндра, якщо його твірна дорівнює $m$.

**25.141.** Об'єм конуса дорівнює $96\pi$ см$^3$, а радіус основи — 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

**25.142.** В основі конуса проведено хорду завдовжки $2\sqrt{2}$ см на відстані 1 см від центра основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом $60°$.

**25.143.** Висота конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осьового перерізу — $120°$. Знайдіть об'єм конуса.

**25.144.** На відстані 12 см від центра кулі проведено площину. Площа утвореного перерізу дорівнює $64\pi$ см$^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.

**25.145.** Довжина лінії перетину поверхні кулі та площини, яка віддалена від її центра на $\sqrt{5}$ см, дорівнює $4\pi$ см. Знайдіть об'єм кулі.

# Дружимо з комп'ютером

У цьому навчальному році ви систематизуєте та вдосконалите свої знання, що дадуть змогу використовувати комп'ютер під час вивчення курсу математики. Визначайте самостійно, яку технічну роботу ви можете виконувати за допомогою комп'ютера; яким чином подавати матеріал, що вивчається, у наочному вигляді. Рекомендуємо також складати алгоритми для розв'язування вправ і програми для їх реалізації мовою програмування, яку ви вивчаєте. Нижче наведено завдання, які відповідають темам, що вивчаються; але цими завданнями зовсім не обмежуються можливості застосування комп'ютера у шкільному курсі математики.

**Завдання курсу математики 11 класу для виконання за допомогою комп'ютера**

**До п. 1 «Показникова функція та її властивості»**

Наведіть приклади з фізики, біології, хімії та інших шкільних предметів, у яких деякий процес може бути описано показниковою функцією. Промоделюйте ці процеси за допомогою табличного редактора; побудуйте графіки.

Чи є в мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, можливість обчислення $a^x$?

**До п. 2 «Показникові рівняння»**

Користуючись поняттям степеня з дійсним показником, запишіть алгоритм для розв'язування рівняння $a^x = b$ для заданих $a > 0$ і $b > 0$. Вважайте, що шуканий розв'язок знайдено, якщо $a^x$ відрізняється від $b$ менше ніж на 0,01.

**До п. 3 «Показникові нерівності»**

Користуючись поняттям степеня з дійсним показником, запишіть алгоритм для наближеного розв'язування нерівності $a^x > b$ для заданих $a > 0$ і $b$. Розгляньте також нерівності $a^x \geqslant b$, $a^x < b$, $a^x \leqslant b$.

**До п. 4 «Логарифм і його властивості»**

Знайдіть у мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, засоби для обчислення логарифма. За якою основою обчислюється логарифм? Як використати ці засоби для обчислення логарифма з будь-якою потрібною основою?

**До п. 5 «Логарифмічна функція та її властивості»**

Складіть у табличному редакторі таблицю значень показникової та логарифмічної функцій з однією і тією самою основою, більшою за 1; меншою від 1. Побудуйте графіки цих функцій на одному екрані. Які властивості цих функцій ілюструють отримані графіки?

**До п. 8 «Похідні показникової та логарифмічної функцій»**

Яким чином у мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, задають число $e$? Чи є засоби для обчислення натурального логарифма?

**До п. 9 «Первісна»**

Використовуючи засоби побудови графіків функцій, складіть алгоритм для побудови графіка первісної лінійної функції.

**До п. 11 «Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл»**

Припустимо, що у вас є підпрограма, яка обчислює значення деякої функції в будь-якій точці. Як обчислити визначений інтеграл цієї функції на заданому проміжку?

Обчисліть у такий спосіб кілька інтегралів із вправ до цього параграфа та порівняйте результати з результатами, які ви отримали під час виконання вправ.

**До п. 12 «Комбінаторні правила суми та добутку»**

Якими засобами в мікрокалькуляторі, у стандартній програмі «Калькулятор» на комп'ютері, у мові програмування, яку ви вивчаєте, можна обчислити факторіал числа? Складіть у табличному редакторі таблицю значень факторіалів кількох перших натуральних чисел.

**До п. 13 «Перестановки. Розміщення. Комбінації»**

Припустимо, що у вас є підпрограма, яка обчислює факторіал числа. Використовуючи цю підпрограму, складіть алгоритм для обчислення кількості перестановок, розміщень і комбінацій.

**До п. 14 «Класичне визначення ймовірності випадкової події»**

Ознайомтеся з поняттям «генератор випадкових чисел». Знайдіть у мові програмування, яку ви вивчаєте, засоби отримання випадкових чисел.

**До п. 15 «Елементи математичної статистики»**

Сформуйте набір значень з використанням генератора випадкових чисел. Заповніть цими значеннями таблицю. Знайдіть розмах, середнє значення, моду та медіану отриманого набору чисел.

**До п. 16 «Призма»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення прямої призми, похилої призми, зображення висоти призми, діагонального перерізу призми. Побудуйте проекції призми на площину, паралельну основі призми, і на площину, паралельну висоті призми.

**До п. 17 «Паралелепіпед»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення паралелепіпеда; прямокутного паралелепіпеда. Які властивості цього тіла та які властивості паралельного проектування треба брати до уваги для отримання адекватного зображення?

**До п. 18 «Піраміда»**

Побудуйте в графічному редакторі зображення різних пірамід. Побудуйте зображення висоти піраміди, двогранного кута піраміди при ребрі основи.

**До п. 19 «Циліндр»**

Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою циліндра обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні.

**До п. 20 «Конус»**

Напишіть програму, яка за даними радіусом основи й висотою конуса обчислює площу його бічної поверхні та площу його повної поверхні.

**До п. 21 «Куля та сфера»**

Напишіть програму, яка за даними радіусом кулі та відстанню від центра кулі до площини визначає:

- взаємне розміщення кулі та площини;
- площу перерізу кулі цією площиною;
- довжину лінії перетину поверхні кулі та цієї площини.

**До п. 22 «Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми та піраміди»**

Напишіть програму для обчислення об'єму:

1) правильної $n$-кутної призми зі стороною основи $a$ та висотою $h$;
2) правильної $n$-кутної піраміди зі стороною основи $a$ та висотою $h$.

**До п. 23 «Об'єми тіл обертання. Площа сфери»**

Напишіть програму для обчислення:

1) об'ємів тіл обертання (конус, циліндр, куля);
2) площі поверхні сфери.

Побудуйте за допомогою редактора діаграм *Word* або *Excel* стовпчасту діаграму. Виберіть вид діаграми «об'ємна» та подання ряду даних у вигляді різних геометричних тіл (призм, конусів тощо). Використовуючи отримані знання про об'єми тіл, визначте, які із цих фігур дають найбільш адекватне уявлення про співвідношення поданих на діаграмі величин.

# Відповіді та вказівки до вправ

**1.12.** 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\dfrac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$. **1.13.** 1) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$; 2) $\dfrac{1}{a^{2\sqrt{5}}}$. **1.14.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **1.15.** 36. **1.16.** [−2; 4]. **1.18.** 3) $(-4;+\infty)$; 4) $[1;+\infty)$. **1.19.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$. **1.20.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **1.22.** 1) Коренів немає; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **1.23.** 1) 1 корінь; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **1.24.** *Вказівка*. Знайдіть область визначення даної функції. **1.25.** 1) 4; $\dfrac{1}{4}$; 2) 1; −1. **1.26.** 1) 6; $\dfrac{1}{6}$; 2) 6; $5\dfrac{1}{5}$. **1.29.** 2) $33\cdot 2^{x-4}$; 3) $13\cdot 3^{x-1}$; 4) $5\cdot 2^{x+1}$; 5) $-29\cdot 6^{x-1}$; 6) $12\cdot 9^{x}$. **1.30.** 1) $(-\infty;-2)\cup(-2;4)\cup(4;+\infty)$; 2) [0; 16]. **1.31.** 1) $(-\infty;16]$; 2) $[3;+\infty)$; 3) (−1; 1).

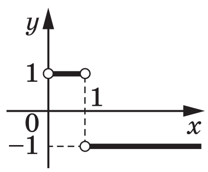
**2.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) −1; 2. **2.7.** 3) $-\dfrac{1}{3}$; 4) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.8.** 3) $(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\dfrac{3}{2}$. **2.11.** 1) −1; 1; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **2.12.** 1) −1; 1; 2) −1; 3) 0; 4) 2. **2.13.** 1) $\dfrac{4}{3}$; 2) 3; 3) 0; $\dfrac{1}{2}$; 4) 2. **2.14.** 1) 4; 2) 0; $\dfrac{1}{3}$; 3) 2. **2.15.** 1) $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{2}$; 2) 1. **2.16.** −1; 2. **2.17.** 2. **2.18.** 0. **2.19.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **2.20.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.21.** $[-3;2)\cup(2;7]$. **2.22.** $\dfrac{1}{2}$.

**3.4.** 5) $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; 6) $\left[-3;\dfrac{1}{3}\right]$; 7) $(-\infty;0)$; 8) [−1; 2]. **3.5.** 3) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2]\cup\left[\dfrac{1}{5};+\infty\right)$; 5) $(-1;+\infty)$. **3.6.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.7.** 1) −5; 2) 7. **3.9.** 1) $(-\infty;-2]$; 2) $(-\infty;4]$. **3.10.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $(-\infty;2)$; 3) $(5;+\infty)$; 4) $(-\infty;-1]$; 5) $(-\infty;0]$; 6) $(-\infty;1)$. **3.11.** 1) $(-\infty;2)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $(3;+\infty)$; 4) $(1;+\infty)$. **3.12.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(-\infty;1)$; 3) [0; 1]; 4) $(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$; 5) $(-\infty;1]$; 6) $[1;+\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty;0]$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; 4) [0; 2]. **3.14.** 1) $(-\infty;2)\cup(2;3]$; 2) $\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{3};2\right]$. **3.15.** 1) $(2;+\infty)$; 2) (−3; 1); 3) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; 4) {0}. **3.16.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **3.17.** [0; 1]. **3.18.** [0; 4]. **3.19.** 1) (0; 1); 2) $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$. **3.20.** 1) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;1]$. **3.21.** 1,5. **3.22.** 1.

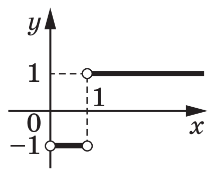
**4.17.** 1) −3; 2) −1; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{2}$. **4.18.** 1) 1; 2) −1; 3) −1. **4.19.** 2) 4; 3) 60; 4) 180. **4.20.** 1) 72; 2) 10. **4.21.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) −3; 3) 2; 4) 4. **4.22.** 1) −5; 2) −2;

3) 6; 4) 9. **4.23.** 2) 144; 3) 64; 4) 1; 5) 0; 6) 48. **4.24.** 1) 9; 2) 10; 4) 2. **4.25.** 0. **4.26.** lg 2. *Вказівка.* У кожному з логарифмів перейдіть до основи 10. **4.27.** $\frac{5}{2}$. **4.30.** $\frac{a+3b}{a-b}$. **4.31.** 1) $x_{\max}=-2$, $x_{\min}=2$; 2) $x_{\max}=1$, $x_{\min}=-\frac{7}{9}$.

**5.17.** 2) $\pi k < x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $(0;1)\cup(1;+\infty)$; 4) $(-\infty;9)\cup(9;10)$. **5.18.** 2) $(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$; 3) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.19.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.20.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.21.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь; 3) 1 корінь. **5.22.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь. **5.23.** 1) $2<\log_3 10<3$; 2) $2<\log_2 5<3$; 3) $-2<\log_{\frac{1}{3}} 7<-1$; 4) $-1<\log_{0,1} 2<0$. **5.24.** 1) $4<\log_2 29<5$; 2) $-4<\log_{\frac{1}{2}} 9<-3$. **5.25.** 1) $\log_4 5>\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1,3<\log_{1,3} 1,5$; 3) $\log_{0,7} 0,8<\log_{0,8} 0,7$. **5.27.** 1) Усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) усі числа виду $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$; 4) $(3;4)\cup(4;6]$; 5) $(-2;-1)\cup(-1;3)$; 6) $(-\infty;1)\cup(3;6)\cup(6;7)$; 7) $(0;2)\cup(2;3)$; 8) $(-3;-2)\cup(-2;-1)\cup(0;+\infty)$. **5.28.** 1) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) усі числа виду $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) $(-8;-2)\cup(-2;-1)$; 5) $(0;7)\cup(7;8)$; 6) $(-1;1)\cup(1;2)$. **5.29.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **5.30.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 1; 4) 15; 5) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.




**До задачі 5.29 (1)**

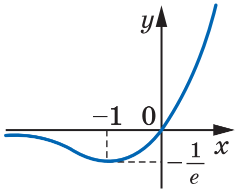



**До задачі 5.29 (2)**

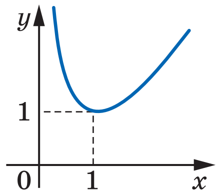
**6.5.** 1) 16; 2) 64; 3) 27; 4) 6; 5) 6; 6) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) $10^{10}$. **6.7.** 1) −2; 6; 2) 5; 3) коренів немає; 4) −2. **6.8.** 1) −2; 2) коренів немає. **6.9.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 5; 4) 4. **6.10.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) −1. **6.11.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) 8; $10^7-2$. **6.12.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.13.** 1) 1; 2) −1; 3) 0; 4) 6. **6.14.** 1) 0; 13; 2) −2. **6.15.** 1) 4; 2) 7. **6.16.** 1) 3; 2) 8. **6.17.** 1) 3; 4; 2) 1; 3) 4; 4) 3. **6.18.** 1) 4; 2) 3. **6.20.** 1) Зростає на проміжку [−2; 1], $x_{\max}=1$, $x_{\min}=-2$; 2) зростає на проміжках $(-\infty;-3)$ і (−3; 0], $x_{\max}=0$; 3) зростає на проміжку [−1; 5], $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=5$. **6.21.** $y=-8x+18$.

**7.5.** 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(0; 1)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **7.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) $(3; 6]$; 6) $(1; 3]$. **7.10.** 1) $(2; 3)$; 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup (0; 1]$; 4) $[0; 1) \cup (1; 2]$; 5) $(-3; -1)$; 6) $(4; 5]$. **7.11.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) $(0; 4)$; 4) $(5; 7]$; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **7.12.** 1) $[-1; 0)$; 2) $(1; 2]$; 3) $[11; +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **7.13.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) $(0{,}0001; 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0; 4] \cup$ $\cup [8; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.14.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0; 0{,}1] \cup [1000; +\infty)$; 3) $(0{,}5; 4)$; 4) $[0{,}04; 5]$. **7.15.** 1; $-20$. **7.16.** $(1; -2)$ і $\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{27}\right)$. **7.17.** $y = -x + 2$.

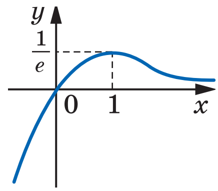
**8.9.** 1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$; 4) $y = 4x - 1$. **8.10.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = 2x + 1$. **8.11.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.12.** $y = -1600$. **8.13.** 1) $y = ex$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$. **8.14.** 1) Зростає на проміжку $[0; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на проміжку $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, спадає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 3) зростає на проміжку $[3; +\infty)$, спадає на проміжках $(-\infty; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$; 4) зростає на проміжку $(-\infty; 1]$, спадає на проміжку $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 5) зростає на проміжку $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 6) зростає на проміжку $(0; 1]$, спадає на проміжку $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 7) зростає на проміжку $(0; +\infty)$; 8) зростає на проміжку $[e; +\infty)$, спадає на проміжках $(0; 1)$ і $(1; e]$, $x_{\min} = e$. **8.15.** 1) Зростає на проміжку $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, спадає на проміжку $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 2) зростає на проміжку $(-\infty; -2]$, спадає на проміжку $[-2; +\infty)$, $x_{\max} = -2$; 3) зростає на проміжку $[1; +\infty)$, спадає на проміжку $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 4) зростає на проміжку $(0; e]$, спадає на проміжку $[e; +\infty)$, $x_{\max} = e$; 5) зростає на проміжку $[1; +\infty)$, спадає на проміжку $(0; 1]$, $x_{\min} = 1$; 6) зростає на проміжку $(0; e^2]$, спадає на проміжку $[e^2; +\infty)$, $x_{\max} = e^2$. **8.16.** $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$. **8.17.** $\frac{1}{e^2}$; 0.




**До задачі 8.18 (1)**




**До задачі 8.18 (2)**




**До задачі 8.19**

**8.18.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок. **8.19.** Див. рисунок. **8.20.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.21.** 1) (4; 4); 2) (4; −4).

**9.6.** 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **9.7.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **9.8.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\mathrm{tg}\,x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **9.9.** 1) $y=2\sqrt{x}+2$; 2) $y=\ln x-1$; 3) $y=x^2-24$. **9.13.** 1) (2; 2,12]; 2) [0,68; 0,7). **9.14.** 1) tg 2α; 2) 2.

**10.3.** 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 4) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$. **10.4.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-2\cos x$. **10.5.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первісна має ще один нуль, який дорівнює 1. **10.6.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.7.** $F_2$. **10.8.** $F_2$. **10.9.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.10.** $s(t)=2t^3+t-47$ або $s(t)=2t^3+t-67$. **10.11.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.12.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.13.** 1) $\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.14.** 1) $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;2{,}5]$; 2) $[-2;1)$.

**11.5.** 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) $8\ln 2$. **11.8.** 4) 70; 5) 39; 6) $1{,}5-0{,}5e^2$. **11.9.** 2) −45; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $1\frac{3}{4}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $e^2-1$; 4) $4\ln 4-3$; 5) $12-4\ln 4$; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24-7\ln 7$; 14) $\sqrt{2}-1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6-3\ln 3$; 7) 1; 8) $12-5\ln 5$. **11.12.** 1) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; 2) $(\log_{0{,}2}6;+\infty)$. **11.13.** $(1;+\infty)$. **11.14.** 3; −3. **11.15.** 2; −2. **11.16.** 1) −1,5; 2) 1; 3) 1. **11.17.** 6.

**12.1.** $4\cdot 3$. **12.2.** $5\cdot 5$, $5\cdot 4$. **12.3.** $3\cdot 6\cdot 5$. **12.4.** 5!. **12.5.** $6^4$. **12.6.** $5^3$. **12.7.** 1) $3\cdot 2$; 2) $3\cdot 3$. **12.8.** Коли Антон узяв яблуко. **12.9.** $3\cdot 2+4\cdot 3$.

**12.10.** $3\cdot6+3\cdot5+6\cdot5$. **12.11.** 1) 4!; 2) 3!. **12.12.** $5\cdot6^3$. **12.13.** $4\cdot5^2$. **12.14.** $9\cdot10^6$. **12.15.** $2^4$. **12.16.** $6^3$. **12.17.** $6\cdot7\cdot4$. **12.18.** $6\cdot7\cdot3$. **12.19.** I спосіб. $4\cdot4!$; II спосіб. $5!-4!$. **12.20.** $4!\cdot2$. **12.21.** $9\cdot10^3\cdot2$. **12.22.** $9\cdot10^4\cdot4$. **12.23.** $4\cdot3\cdot2+5\cdot2+6\cdot4$. **12.24.** $5^7+4\cdot5^6$. **12.25.** 1) 4,1; 2) 1; 3) 2; 4) 83; 5) 1; 6) 4. **12.26.** 3.

**13.1.** 7!. **13.2.** 20!. **13.3.** 5!. **13.4.** $A_{11}^2$. **13.5.** $A_{15}^3$. **13.6.** $A_{12}^6$. **13.7.** $A_{16}^3$. **13.8.** $A_{32}^2$. **13.9.** $C_{29}^5$. **13.10.** $C_n^4$. **13.11.** $C_{10}^3$. **13.12.** $A_3^2\cdot A_5^4$. **13.13.** $C_7^2\cdot C_{13}^3$. **13.14.** $C_{12}^3\cdot C_{88}^7$. **13.15.** $7\cdot C_{12}^2+12\cdot C_7^2$. **13.16.** I спосіб. $C_9^3+15\cdot C_9^2+9\cdot C_{15}^2$; II спосіб. $C_{24}^3-C_{15}^3$. **13.17.** 40 %.

**14.1.** Ні. **14.2.** Так. **14.3.** 1) 0; 2) 1. **14.4.** 1) 0; 2) 1. **14.6.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **14.9.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **14.11.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **14.12.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **14.13.** $\frac{5}{33}$. **14.14.** $\frac{1}{494}$. **14.15.** $\frac{C_{12}^5}{C_{27}^8}$. **14.16.** $\frac{C_{15}^3}{C_{1000}^3}$. **14.17.** 1) 18; 2) 3. **14.18.** 2) 8. **14.19.** 2 год.

**15.3.** Моду. **15.4.** Медіану та моду. **15.11.** 2,21875 ≈ 2,2 м'яча за гру. **15.12.** 3,8. **15.17.** 1) 6; 2) 3. **15.18.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) 1. **15.19.** −0,96.

**16.13.** 18 см$^2$. **16.14.** $32\sqrt{2}$ см$^2$. **16.15.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45°. **16.16.** $2a$, $a\sqrt{5}$. **16.17.** $2a\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **16.18.** 9 см. **16.19.** 7 см. **16.20.** 6 см. **16.21.** $72\sqrt{6}$ см$^2$. **16.22.** $12\sqrt{7}$ см$^2$. **16.23.** 48 см$^2$. **16.24.** 1250 см$^2$. **16.25.** 1) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **16.26.** $\frac{a^2}{2\cos\beta\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha}$ **16.27.** 1) $\frac{1}{2}d\operatorname{tg}\beta$; 2) $\frac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}$. **16.28.** 522 см$^2$. **16.29.** 6 см, 8 см або 8 см, 6 см. **16.30.** $\frac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha$. **16.31.** $\frac{h^2\sin\alpha}{2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.32.** $3\sqrt{10}$ см.

**17.5.** 7 см. **17.6.** 2 см, 4 см, 4 см. **17.7.** $a\sqrt{3}$. **17.8.** $36\sqrt{2}$ см$^2$. **17.9.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{7}{13}$. **17.10.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{6\sqrt{74}}{37}$. **17.11.** 18 см$^2$ або 16 см$^2$. **17.12.** $\frac{2d^2\operatorname{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **17.13.** $144\sqrt{2}$ см$^2$. **17.14.** $12\left(\sqrt{2}+2\right)$ см$^2$. **17.15.** $4\left(5\sqrt{3}+4\right)$ см$^2$. **17.17.** 2 см. **17.18.** 64 см$^2$. **17.19.** $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. **17.20.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$. **17.21.** 300 см$^2$. **17.22.** $50\left(\sqrt{2}+1\right)$ см$^2$.

**18.12.** $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ см$^2$. **18.13.** $16\sqrt{3}$ см$^2$. **18.14.** 6 см. **18.15.** 20 см, $\sqrt{281}$ см, 20 см, $\sqrt{281}$ см. **18.16.** $\frac{1}{2}b^2\sin2\beta$. **18.17.** $\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **18.19.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **18.20.** $\frac{d^2}{2\cos\alpha}$. **18.21.** 72 см$^2$. **18.22.** $75\sqrt{6}$ см$^2$. **18.23.** 3) 24 см$^2$. **18.24.** 20 см.

**18.25.** 20 см. **18.26.** $5\sqrt{3}$ см. **18.27.** 1) $32\sqrt{2}$ см$^2$; 2) 2 см. **18.28.** 1) $20\sqrt{3}$ см$^2$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **18.29.** 1) 160 см$^2$; 2) $4\sqrt{3}$ см. **18.30.** 1) 4 см; 2) $\left(32+8\sqrt{10}+ +24\sqrt{2}\right)$ см$^2$. **18.31.** 360 см$^2$. **18.32.** 16 см. **18.33.** 1 : 9.

**19.8.** $18\pi\sqrt{3}$ см$^2$. **19.9.** 13 см. **19.10.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **19.11.** $2\pi$ см$^2$. **19.13.** $24\pi\sqrt{2}$ см$^2$. **19.14.** $128\pi$ см$^2$. **19.15.** $\frac{2\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **19.16.** $\frac{\pi m^2\sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **19.17.** 8 см. **19.18.** $2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **19.19.** 48 см$^2$. **19.20.** *Вказівка*. Побудуйте осьовий переріз циліндра, який проходить через точку $A$. **19.21.** 16 см. **19.22.** 10 см. **19.23.** $h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$. **19.24.** 6 см. **19.25.** $4\sqrt{13}$ см.

**20.7.** 1) $\frac{H^2}{\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\pi H^2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.8.** 1) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; 2) $\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **20.11.** 25 см, 20 см. **20.12.** $160\pi$ см$^2$. **20.13.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **20.14.** $2m\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$. **20.15.** $\frac{1020\pi}{13}$ см$^2$. **20.16.** $\frac{H^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.17.** $32\pi\sqrt{2}$ см$^2$. **20.18.** $\frac{1}{2}\pi a^2\operatorname{tg}\alpha(2\cos\alpha+1)$. **20.19.** $\frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **20.20.** $84\pi$ см$^2$. **20.21.** $\pi\left(9+\sqrt{2}\right)$ см$^2$. **20.22.** $200\pi\sqrt{3}$ см$^2$. **20.23.** $240\pi$ см$^2$. **20.24.** 8 см. **20.25.** 216°. **20.26.** $\frac{a}{\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **20.27.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см. **20.28.** 10 см. **20.29.** 8 см. **20.30.** $12\sqrt{3}$ см.

**21.13.** $\pi R^2\cos^2\alpha$. **21.14.** $4\pi\sqrt{3}$ см. **21.15.** 24 см. **21.16.** 8 см. **21.17.** 7 см. **21.18.** $32\pi$ см$^2$. **21.19.** 1 см. **21.20.** 15 см. **21.21.** $8\sqrt{2}$ см. **21.22.** 6 см. **21.23.** $10\pi$ см. **21.24.** 25 см. **21.25.** $a^2\sqrt{2}$.

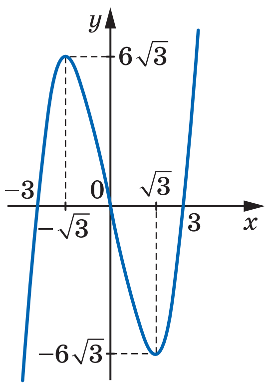
**22.2.** 8 см$^3$. **22.5.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **22.7.** $\frac{h^3\sqrt{3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **22.8.** 288 см$^3$. **22.9.** 6 см. **22.10.** 36 800 м$^3$. **22.11.** $h=\frac{ab}{S}$. **22.12.** 456 м$^3$. **22.18.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ см$^3$. **22.19.** 1692 см$^3$. **22.20.** 18 см$^3$. **22.21.** $480\sqrt{3}$ см$^3$. **22.22.** $162\sqrt{3}$ см$^3$. **22.23.** 1152 см$^3$. **22.26.** $\frac{V}{6}$. **22.27.** $\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **22.28.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **22.29.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **22.30.** $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **22.31.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **22.32.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ см$^3$. **22.33.** $\frac{1}{4}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **22.34.** $\frac{1}{4}c^3\sin 2\beta\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$. **22.35.** $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **22.36.** $\frac{a^3}{2}$. **22.37.** 108 см$^3$. **22.38.** 2880 см$^3$. **22.39.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos\alpha}$. **22.40.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **22.41.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **22.42.** $\frac{280}{3}$ см$^3$. **22.43.** $40\sqrt{3}$ см$^3$. **22.44.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **22.45.** $\frac{a^3}{16}$.

**22.46.** 96 см$^3$. **22.47.** $64\sqrt{3}$ см$^2$. **22.48.** 936 см$^2$. **22.49.** 1) $p=4$; 2) $p=0$.

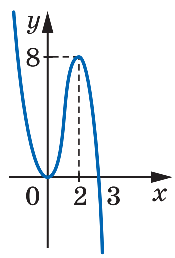
**23.4.** $\pi a^2 b$. **23.5.** $\frac{\pi H^3}{4}$. **23.6.** $750\pi$ см$^3$. **23.11.** 39 т. **23.12.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **23.13.** $64\pi$ см$^3$. **23.14.** $125\pi$ см$^3$. **23.15.** $240\pi$ см$^3$. **23.24.** 9 : 25. **23.25.** 80 м. **23.26.** 77 кг. **23.27.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$. **23.28.** $\pi R^3$. **23.29.** $\frac{\pi m^3}{3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **23.30.** $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. **23.31.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ см$^3$. **23.32.** 6 см. **23.33.** 1,6 т. **23.34.** 125 куль. **23.35.** 6 см. **23.37.** $232\pi$ см$^2$. **23.38.** $160\pi$ см$^2$. **23.39.** 55,3 м. **23.41.** $3380\pi$ см$^3$. **23.42.** $\frac{2\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}$. **23.43.** $448\pi$ см$^3$. **23.44.** $225\pi$ см$^3$. **23.45.** $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\beta\operatorname{tg}\beta$. **23.46.** $2500\pi$ см$^2$. **23.47.** $136\pi$ см$^2$. **23.48.** 153°. **23.49.** 36°, 36°, 108°. **23.50.** Так.

**24.13.** 14. **24.14.** 20. **24.15.** 3. **24.16.** 11 букетів. **24.17.** 4. **24.21.** 1) 6; 2) 3; 3) 3. **24.32.** 36 пакетів. **24.33.** 14 банок. **24.34.** 32 год. **24.35.** 15 год. **24.36.** 1) 36 зошитів; 2) 12 зошитів. **24.38.** 54 год. **24.43.** Зменшилася на 25 %. **24.45.** 45 000 грн, 15 000 грн. **24.46.** 200 г, 400 г. **24.47.** 20 кг, 30 кг. **24.51.** 4 %. **24.54.** 72 600 грн. **24.65.** 1) Коренів немає; 2) 2; 3) 4; 4) 1,5. **24.68.** 1) (2; −3); 2) $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$; 3) (4; 2); 4) (8; −9). **24.70.** 2) (−2; 1); 3) (1; 1), (3,6; 11,4). **24.77.** 4) $(-\infty; 18]$. **24.80.** 1) $a<-\frac{1}{4}$; 2) $a\leqslant 6{,}4$. **24.81.** 3) $\left(-\frac{4}{11}; 5\right)$; 4) $\varnothing$. **24.84.** 1) 11; 2) 4. **24.87.** 5) $-\frac{1}{36}$; 6) $\frac{4}{9}$. **24.101.** 1) 1 корінь; 2) 2 корені. **24.102.** 2) −4; 4) −1; 5) 4; 6) 5. **24.103.** 1) 1; 16; 2) $\frac{1}{64}$; 4) 4. **24.104.** 3) $[-6; 4]$; 4) $[7; 8)\cup(8; +\infty)$; 5) $\{5\}$; 6) $(-\infty; -7)\cup[3; 7)\cup(7; +\infty)$. **24.116.** $p=4$, $q=7$. **24.119.** *а*) $k>0$, $b<0$; *б*) $k<0$, $b>0$. **24.125.** При $m=0$ маємо: −1, 1, 3; при $m=2$ маємо: 5, 5, 5. **24.129.** 1377. **24.130.** 616. **24.136.** $1\leqslant a\leqslant 3$. **24.137.** 1) 5; −3; 2) 7; 6. **24.144.** 1) $\frac{1}{4}\sin\alpha$; 2) $4\cos 4\alpha$. **24.147.** $-\frac{3\pi}{2}$. **24.148.** 3 корені. **24.149.** 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{8}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **24.155.** 2) (−1; 4]; 3) [0; 4]; 4) $(-\infty; -2]\cup[0; +\infty)$. **24.156.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8. **24.157.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$. **24.158.** 1) 4; 2) $\log_3 2$; 3) $\log_7 5$; 4) 0; 3; 5) −1; 2; 6) 1; $\log_3\frac{5}{4}$. **24.159.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; -2]\cup[1; +\infty)$; 4) $[-2; +\infty)$. **24.162.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$. **24.168.** 2) 50; 3) 27; 6) коренів немає. **24.169.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) −1. **24.170.** 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) $e^7$; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 81; 3. **24.171.** 4) $[-5; -4)\cup(0; 1]$; 7) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 8) (1; 3). **24.172.** 1) (0; 1]; 2) (1; 3]. **24.173.** 1) $(0; 1]\cup[10; +\infty)$;

2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right] \cup [8; +\infty)$. **24.177.** 1) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; 2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. **24.178.** (2; 3). **24.179.** (1; 0). **24.180.** $y = 5x$ і $y = 5x - 27$. **24.182.** 1) Зростає на проміжку $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, спадає на проміжках $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ і $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{1}{4}$, $x_{min} = -\frac{1}{3}$; 2) зростає на $\mathbb{R}$; 3) зростає на проміжках $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; 0)$ і $(0; 4]$, $x_{max} = -4$, $x_{min} = 4$; 4) зростає на проміжках $(-\infty; -2)$, $(-2; 1]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[1; 2)$ і $(2; 4]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 4$; 5) зростає на проміжку $(-\infty; -1]$, спадає на проміжку $[-1; +\infty)$, $x_{max} = -1$; 6) зростає на проміжку $[2; +\infty)$, спадає на проміжку $(0; 2]$, $x_{min} = 2$. **24.183.** 1) 1; −6; 2) $\frac{3}{5}$; −1; 3) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{4}{5}$; −1. **24.184.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок.




**До задачі 24.184 (1)**




**До задачі 24.184 (2)**

**24.185.** 2) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + C$. **24.186.** 1) $F(x) = x^2 + 4x - 11$; 2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$. **24.187.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 18; 3) $4\ln 3 - 4$; 4) −6. **24.188.** 1) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 2) ln 3; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 4,5. **24.189.** 72. **24.190.** 8!. **24.191.** $C_{32}^3$. **24.192.** $12C_{16}^2$. **24.193.** 4!. **24.204.** 13. **24.206.** 2 год 15 хв, 2 год 24 хв.

**25.1.** 84 см. **25.2.** 60 см$^2$. **25.3.** $\sqrt{26}$ см. **25.4.** 10 см. **25.5.** 12 см. **25.6.** $\left(\sqrt{2}+1\right)$ см$^2$. **25.7.** $4\sqrt{13}$ см. **25.8.** $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$. **25.9.** 48 см. **25.10.** 8 см. **25.11.** 20 см. **25.12.** 192 см. **25.13.** 8 см. **25.14.** 24 см. **25.15.** 28 см. **25.16.** 30 см. **25.17.** 36 см$^2$. **25.18.** 36 см$^2$. **25.19.** 18 см$^2$. **25.20.** 98 см$^2$. **25.21.** 6 см. **25.22.** 4,5 см. **25.23.** 128 см. **25.24.** $\frac{4000}{3}$ см$^2$. **25.25.** 15 см, 24 см. **25.26.** 6 см. **25.27.** 60°. **25.28.** $\frac{441\pi}{20}$ см$^2$. **25.29.** 2 см. **25.30.** 12 см.

**25.31.** $60\sqrt{2}$ см$^2$. **25.32.** 22 см. **25.33.** 96 см$^2$. **25.34.** $\dfrac{2c}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **25.35.** 15 см. **25.36.** 230 см$^2$. **25.37.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **25.38.** 96 см$^2$. **25.39.** 135 см$^2$. **25.40.** 288 см$^2$. **25.41.** 624 см$^2$. **25.42.** 196 см. **25.43.** 100°. **25.44.** 58°. **25.45.** 1 : 2. **25.46.** $\sqrt{3}:2$. **25.47.** $\dfrac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$. **25.48.** 15°. **25.49.** 6 см. **25.50.** 20 см. **25.51.** $29\pi$ см. **25.52.** 8 см, 12 см. **25.53.** 18 см. **25.55.** $\sqrt{5}$. **25.56.** $A$ (3; −2). **25.57.** (0; −1,5). **25.59.** $(x-1)^2+(y-7)^2=25$. **25.60.** $y=3x+7$. **25.61.** $y=x\sqrt{3}+2$. **25.62.** $y=-0{,}5x-4$. **25.67.** 10. **25.70.** $\vec{m}(7;1)$. **25.71.** $\sqrt{65}$. **25.72.** 1. **25.73.** 18. **25.74.** 6. **25.75.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **25.76.** 135°. **25.77.** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{a}+\vec{b}$. **25.78.** $\overrightarrow{EF}=\frac{4}{7}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$. **25.82.** 120°. **25.87.** (6; −9). **25.88.** (3; 4). **25.99.** $10\sqrt{3}$ см. **25.100.** 300 см$^2$. **25.101.** 360 см$^2$. **25.102.** $5\sqrt{7}$ см. **25.103.** 30 см, 20 см, 18 см. **25.104.** $12\sqrt{17}$ см$^2$. **25.105.** $12a^2\operatorname{tg}\alpha$. **25.106.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. **25.107.** $2a^2\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta+\sin\alpha\right)$. **25.108.** 3 см. **25.110.** $\dfrac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. **25.111.** 1250 см$^2$. **25.112.** 600 см$^2$. **25.116.** 5 см. **25.117.** $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **25.118.** 50 см$^2$. **25.121.** $350\pi$ см$^2$. **25.124.** 8 см$^2$. **25.125.** $R^2$. **25.126.** $\dfrac{\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **25.127.** 30 см. **25.128.** 6 см. **25.129.** $64\sqrt{2}$ см$^3$. **25.130.** $\dfrac{3d^3\sqrt{15}}{50}$. **25.132.** $25\sqrt{119}$ см$^3$. **25.133.** 48 см$^3$. **25.135.** $36\sqrt{6}$ см$^3$. **25.138.** $3\sqrt{3}$ см$^3$. **25.139.** $32\pi$ см$^3$. **25.140.** $\dfrac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **25.141.** $60\pi$ см$^2$. **25.142.** $3\pi$ см$^3$. **25.144.** $832\pi$ см$^2$.

## Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

| Номер завдання | Номер задачі | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 1 | Г | Б | Б | Г | Б | А | В | Б | Г | Б | В | В | А | В | В | А | В | Б |
| 2 | Б | Г | Б | Г | Г | Б | А | Б | Б | А | А | В | Б | Б | Г | В | В | А |
| 3 | Г | В | А | Б | В | В | Г | Г | Б | Г | Г | Б | Б | Б | Б | Г | В | А |
| 4 | А | В | Б | В | Б | Г | В | Г | А | Г | А | Б | А | В | А | Б | А | Б |
| 5 | Б | В | А | А | Г | Г | А | Б | Б | Г | В | В | А | В | Г | А | Б | А |
| 6 | Г | Б | Г | А | А | Б | В | Г | В | В | Б | Б | В | Б | Г | А | Г | В |

# Предметний покажчик


Апофема правильної піраміди 111

Бічна поверхня конуса 128
— — циліндра 122

Великий круг кулі 134
Вершина конуса 128
Вибірка 83
— репрезентативна 83
Виміри прямокутного паралелепіпеда 106
Висота конуса 128
— піраміди 110
— призми 100
— циліндра 122
Вісь конуса 128
— циліндра 122

Генеральна сукупність 86
Геометричне тіло 98
Геометричний зміст визначеного інтеграла 60
Грані многогранника сусідні 98
— паралелепіпеда протилежні 105

Діагональ многогранника 99
Діагональний переріз піраміди 110
— — призми 100
Діаметр кулі 133
— сфери 133
Дотична площина до сфери 134

Експонента 40
Загальний вигляд первісних 50

Інтеграл визначений 59
— невизначений 50

Класичне визначення ймовірності 78
Комбінаторика 70
Комбінація 76
Конус 128
Криволінійна трапеція 57
Куб 106
Куля 133
Кут многогранника двогранний при ребрі 99
— — плоский при вершині 98

Логарифм 21
— десятковий 22
— натуральний 40
— степеня 22
— частки 22

Медіана 87
Многогранник 98
— опуклий 99
Мода 87

Об’єм тіла 141
Основа конуса 128
— циліндра 122
Основна логарифмічна тотожність 21
Осьовий переріз конуса 128
— — циліндра 123

Паралелепіпед 105
— прямий 106
— прямокутний 106
Первісна 49
Перестановка 74
Піраміда правильна 110
— $n$-кутна 109

Площа бічної поверхні конуса 129
— — — піраміди 111
— — — призми 101
— — — циліндра 124
— поверхні многогранника 99
— повної поверхні конуса 129
— — — піраміди 111
— — — призми 101
— — — циліндра 124
Подія вірогідна 79
— достовірна 79
— неможлива 79
Правило добутку 70
— суми 70
Призма правильна 100
— пряма 100
— $n$-кутна 99

**Р**адіус кулі 133
— сфери 133
Результат сприятливий 89
Результати рівноможливі 78

Розгортка бічної поверхні конуса 129
— — — циліндра 123
— конуса 128
— циліндра 123
Розмах 86
Розміщення 75

**С**ереднє значення 86
Статистика 82
Сфера 133

**Т**вірна конуса 128
— циліндра 122
Тетраедр правильний 111
Тіло 98
— обертання 122

**Ф**ормула Ньютона—Лейбніца 59
Функція логарифмічна 27
— первісна 49
— показникова 7

**Ц**ентр кулі 133
— сфери 133
Циліндр 122

## ЗМІСТ

*Від авторів* .................................................. 3
*Умовні позначення* .................................................. 4

Розділ 1. **АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ**

**§ 1. Показникова та логарифмічна функції** .................................. 6
1. Показникова функція та її властивості .................................. 6
• Чи потрібно вивчати показникову функцію? .................... 12
2. Показникові рівняння .................................. 13
3. Показникові нерівності .................................. 17
4. Логарифм і його властивості .................................. 20
5. Логарифмічна функція та її властивості .................................. 27
6. Логарифмічні рівняння .................................. 32
7. Логарифмічні нерівності .................................. 36
8. Похідні показникової та логарифмічної функцій ................. 40
• Моя любов — Україна і математика .................................. 44
• Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.) .................................. 44

*Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі* .......................... 45
*Головне в параграфі 1* .................................. 47

**§ 2. Інтеграл і його застосування** .................................. 49
9. Первісна .................................. 49
10. Правила знаходження первісної .................................. 54
11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл ........... 57
• «Розумом він перевершив рід людський» .......................... 65

*Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі* .......................... 67
*Головне в параграфі 2* .................................. 69

**§ 3. Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і математичної статистики** .................................. 70
12. Комбінаторні правила суми та добутку .............................. 70
13. Перестановки. Розміщення. Комбінації ............................. 74
14. Класичне визначення ймовірності випадкової події ............. 78
15. Елементи математичної статистики .................................. 82

*Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі* .......................... 93
*Головне в параграфі 3* .................................. 96

Розділ 2. **ГЕОМЕТРІЯ**

**§ 4. Многогранники** ........ 98

16. Призма ........ 98
17. Паралелепіпед ........ 105
18. Піраміда ........ 109
    • Краса та розум України ........ 117

*Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі* ........ 118
*Головне в параграфі 4* ........ 120

**§ 5. Тіла обертання** ........ 122

19. Циліндр ........ 122
20. Конус ........ 128
21. Куля та сфера ........ 133

*Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі* ........ 137
*Головне в параграфі 5* ........ 140

**§ 6. Об'єми тіл. Площа сфери** ........ 141

22. Об'єм тіла. Формули для обчислення об'єму призми та піраміди ........ 141
23. Об'єми тіл обертання. Площа сфери ........ 148

*Завдання № 6 «Перевірте себе» в тестовій формі* ........ 155
*Головне в параграфі 6* ........ 157

**§ 7. Повторення курсу математики** ........ 158

24. Задачі для повторення курсу алгебри ........ 158
25. Задачі для повторення курсу геометрії ........ 179

*Дружимо з комп'ютером* ........ 192

*Відповіді та вказівки до вправ* ........ 195

*Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі»* ........ 203

*Предметний покажчик* ........ 204

## Форзац 3

### Таблиця первісних деяких функцій

| Функція $f$ | Первісна функції $f$ |
|---|---|
| $k$ (стала) | $kx$ |
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln \lvert x \rvert$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ |

| Функція $f$ | Первісна функції $f$ |
|---|---|
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathrm{tg}\, x$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln a}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |

### Правила інтегрування

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

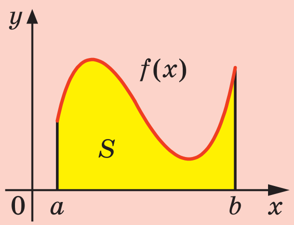
$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

### Формула Ньютона—Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

### Площа криволінійної трапеції




$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

| Перестановки | Розміщення | Комбінації |
|---|---|---|
| $P_n = n!$ | $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ |

## Форзац 4

### Формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів геометричних тіл

**Площа бічної поверхні циліндра**

$S_б = 2\pi rh$, де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, $r$ — радіус основи циліндра, $h$ — довжина висоти циліндра

**Площа повної поверхні циліндра**

$S_п = S_б + 2S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра,
$S_{осн}$ — площа основи циліндра
$S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2$

**Площа бічної поверхні конуса**

$S_б = \pi rl$, де $r$ — радіус основи конуса, $l$ — довжина твірної конуса

**Площа повної поверхні конуса**

$S_п = S_б + S_{осн}$, де $S_п$ — площа повної поверхні конуса,
$S_{осн}$ — площа основи конуса
$S_п = \pi rl + \pi r^2$

**Об'єм призми**

$V = Sh$, де $V$ — об'єм призми, $S$ — площа основи призми, $h$ — довжина висоти призми

**Об'єм піраміди**

$V = \frac{1}{3}Sh$, де $V$ — об'єм піраміди, $S$ — площа основи піраміди, $h$ — довжина висоти піраміди

**Об'єм циліндра**

$V = \pi r^2 h$, де $V$ — об'єм циліндра, $r$ — радіус основи циліндра, $h$ — довжина висоти циліндра

**Об'єм конуса**

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, де $V$ — об'єм конуса, $r$ — радіус основи конуса, $h$ — довжина висоти конуса

**Об'єм кулі**

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де $V$ — об'єм кулі, $R$ — радіус кулі

**Площа сфери**

$S = 4\pi R^2$, де $S$ — площа сфери, $R$ — радіус сфери

9 789664 743232